
Untersuchung von gebundenen Zuständen in geknickten Hohlleitern

Experimental investigation of bound states in sharply bent waveguides

Bachelor-Thesis von Christopher Ripp

September 2011



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
AG Quantenchaos



Gefördert durch die DFG im Rahmen des SFB 634.

Untersuchung von gebundenen Zuständen in geknickten Hohlleitern
Experimental investigation of bound states in sharply bent waveguides

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Christopher Ripp

1. Gutachten: Professor em. Dr. Dr. h.c. mult. Achim Richter
2. Gutachten: Dr. Barbara Dietz

Tag der Einreichung:

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die experimentelle Untersuchung von theoretischen Vorhersagen über die Existenz und die Eigenschaften von gebundenen Zuständen in scharf geknickten Mikrowellenhohlleitern. Diese erhält man, in dem man einen Rechteckhohlleiter in zwei Teile zerlegt, diese an den Schnittenden im gleichen Winkel abschrägt und dann wieder zusammenfügt. In einem Hohlleiter ist erst ab einer kritischen Frequenz eine Propagation von Mikrowellen möglich. Diese hängt von der Breite der Hohlleiter ab. Entsprechend können sich im Bereich der Spitze stehende Wellen bei niedrigeren Frequenzen ausbilden als in den geraden Stücken. Theoretische Überlegungen sagen die Existenz von gebundenen Zuständen voraus. Der Querschnitt des Bereichs in der Spitze nimmt mit abnehmendem Knickwinkel zu. Entsprechend wurden sogenannte Entstehungswinkel vorhergesagt, bei denen sich ein neuer quasigebundener Zustand ausbildet.

Das Verständnis dieser in der Spitze lokalisierten Zustände ist deshalb von Interesse, da die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen mathematisch auf die gleiche Art und Weise beschrieben werden kann wie die von Elektronen in einem Quantendraht. Quantendrähte spielen in der fortschreitenden Miniaturisierung von elektronischen Bauteilen eine wichtige Rolle, so dass deren physikalisches Verständnis von großer Bedeutung ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Existenz von gebundenen Zuständen unterhalb der kritischen Frequenz nachgewiesen und es wurden die experimentell bestimmten Entstehungswinkel mit den theoretischen Vorhersagen verglichen. Auch die Zerfallslänge der evaneszenten Felder der gebundenen Zustände, die in die geraden Stücke, die Schenkel des Hohlleiters, eindringen, stimmte mit den theoretischen Berechnungen überein. Lediglich in der Nähe eines Entstehungswinkels streuen die Zerfallslängen teils stark um die Theoriewerte. Da sie hier von der Größenordnung der Schenkellänge sind, wird das Tunneln zu den offenen Enden des Hohlleiters relevant.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	4
2.1	Mikrowellenhohlleiter	4
2.1.1	Helmholtz-Gleichung	4
2.1.2	Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern	4
2.1.3	Kritische Frequenz eines Hohlleiters	6
2.2	Gebundene Zustände in geknickten Hohlleitern	7
2.3	Messung von Frequenzspektren	9
2.4	Messung von Intensitätsverteilungen	10
3	Experimentelle Ergebnisse	11
3.1	Experimenteller Aufbau	11
3.2	Frequenzspektrum und Intensitätsverteilung eines geknickten Hohlleiters	12
3.3	Entwicklung der quasigebundenen Zustände am Entstehungswinkel	15
3.4	Zerfallslängen der quasigebundenen Zustände	17
4	Zusammenfassung und Ausblick	21

1 Einleitung

Durch die fortschreitende Miniaturisierung von Leiterbahnen und -strukturen auf immer kleinere Skalen wird schließlich eine Längenskala erreicht, wo die Leitungseigenschaften von den klassisch bekannten abweichen, weil Quanteneffekte eine bedeutende Rolle zu spielen beginnen. Beispiele dafür sind quasieindimensionale Leiterstrukturen, sogenannte Quantendrähte, welche auch als Quantenwellenleiter bezeichnet werden [1, 2, 3]. Bei der theoretischen Untersuchung eines Systems aus zwei gekreuzten Quantendrähten entdeckten Schult et al. [4] gebundene Zustände. Solche waren bereits vorher von Lenz et al. in einem L-förmigen Wellenleiter berechnet worden [5]. Die Existenz von gebundenen Zuständen in geknickten oder gebogenen Wellenleitern war unerwartet, da das korrespondierende klassische System vollständig offen ist. Somit handelt es sich um ein rein quantenmechanisches Phänomen. Experimentell untersuchten zum Beispiel Wu et al. [6] einen zweifach geknickten Quantendraht und fanden unterhalb der Propagationsschwelle Resonanzen. Diese wurden später von Wang et al. [7] und Carini et al. [8, 9] als resonantes Tunneln durch die in den Knicken lokalisierten, gebundenen Zustände interpretiert. Mathematisch bewiesen wurde die Existenz von gebundenen Zuständen in gebogenen Wellenleitern von Exner und Šeba [10, 11] und unter allgemeineren Voraussetzungen von Jaffe und Goldstone [12]. Experimentell wurden gebundene Zustände auch in geknickten rechteckigen Mikrowellenhohlleitern untersucht. Carini et al. führten Mikrowellenexperimente mit scharf geknickten Hohlleitern durch und entdeckten abhängig vom Winkel des Knicks mehrere gebundene Zustände unterhalb der kritischen Frequenz für die Propagation von Mikrowellen im Hohlleiter [13, 14].

Im Rahmen dieser Arbeit wurden gebundene Zustände in scharf geknickten Mikrowellenhohlleitern (ähnlich wie in [13, 14]) untersucht. Von zentralem Interesse war die Abhängigkeit der Anzahl der gebundenen Zustände vom Winkel des Knicks und deren Eigenschaften nahe der kritischen Frequenz. Dies ist von Bedeutung, da dort ein besonders großer Einfluss der gebundenen Zustände auf das Transmissionsverhalten des Hohlleiters erwartet wird.

2 Grundlagen

2.1 Mikrowellenhohlleiter

In den folgenden Abschnitten werden die für diese Arbeit relevanten theoretischen Grundlagen der Propagation von elektromagnetischen Wellen in Mikrowellenhohlleitern zusammengefasst.

2.1.1 Helmholtz-Gleichung

Die Maxwell-Gleichungen für elektromagnetische Felder in Abwesenheit freier Ströme und Ladungen lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\quad (1)$$

wobei ϵ_0 bzw. μ_0 die Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Permeabilität des Vakuums sind und ϵ_r die relative elektrische Dielektrizitätskonstante und μ_r die relative magnetische Permeabilität des Mediums [15]. Im Folgenden wird angenommen, dass $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ist, da sich in den hier untersuchten Hohlleitern nur Luft befindet. Für eine harmonischen Zeitabhängigkeit $\exp(-i\omega t)$ des elektrischen Felds \vec{E} und des magnetischen Felds \vec{B} mit der Kreisfrequenz ω ergeben sich aus den obigen Gleichungen die sogenannten vektoriellen Helmholtz-Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} ,

$$(\Delta + k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (2)$$

welche das elektromagnetische Feld z.B. in Hohlleitern und Hohlraumresonatoren beschreiben. Dabei ist $k = \omega/c$ die Wellenzahl und $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

2.1.2 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

Für einen geraden Hohlleiter mit konstantem Querschnitt lassen sich die Helmholtz-Gleichungen (2) durch Abseparieren der x -Koordinate in Richtung des Hohlleiters (siehe Abb. 1) zu

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{B}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}(y, z, t) e^{\pm i k_x x - i \omega t} \\ \vec{B}(y, z, t) e^{\pm i k_x x - i \omega t} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

vereinfachen, wobei $\exp(+ik_x x)$ einer in positiver und $\exp(-ik_x x)$ einer in negativer x -Richtung propagierenden Welle entspricht. Dadurch lassen sich die Helmholtz-Gleichungen auf die zweidimensionale Form

$$(\Delta_t + \gamma^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

reduzieren. Dabei ist $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der transversale Anteil des Laplace-Operators und

$$\gamma^2 = k^2 - k_x^2. \quad (5)$$

Im Folgenden zerlegen wir die Felder in ihren Anteil in Propagationsrichtung, $E_x \vec{e}_x$ und $B_x \vec{e}_x$, und in ihren transversalen Anteil, \vec{E}_t und \vec{B}_t . Mittels der Maxwell-Gleichungen folgt für letztere [15]

$$\vec{E}_t = \frac{i}{\gamma^2} \left[k_x \vec{\nabla}_t E_x - \omega \vec{e}_x \times \vec{\nabla}_t B_x \right] \quad (6)$$

und

$$\vec{B}_t = \frac{i}{\gamma^2} \left[k_x \vec{\nabla}_t B_x + \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_x \times \vec{\nabla}_t E_x \right], \quad (7)$$

so dass man die Helmholtz-Gleichung nur für E_x und B_x lösen muss. Dabei ist $\vec{\nabla}_t = \partial/\partial y \cdot \vec{e}_y + \partial/\partial z \cdot \vec{e}_z$. Des Weiteren lassen sich die Moden in einem Hohlleiter gemäß ihrer Polarisation klassifizieren. Es gibt transversal magnetische (TM-) Moden mit $B_x = 0$, transversal elektrische (TE-) Moden mit $E_x = 0$ und in bestimmten Hohlleiter-Typen transversal elektromagnetische (TEM-) Moden mit $E_x = B_x = 0$. Letztere treten in den hier betrachteten Hohlleitern jedoch nicht auf. Da die normale Komponente des B-Felds an metallischen Oberflächen ∂S verschwindet, ergibt sich für die TM-Moden mit diesen Randbedingungen die Helmholtz-Gleichung zu

$$(\Delta_t + \gamma^2) E_x = 0 \quad \text{mit} \quad E_x|_{\partial S} = 0 \quad (8)$$

und für TE-Moden

$$(\Delta_t + \gamma^2) B_x = 0 \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial B_x}{\partial n} \right|_{\partial S} = 0. \quad (9)$$

Hierbei ist \vec{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor zur Metalloberfläche. Durch Lösen dieser obigen Gleichungen erhält man mit Gln. (6) und (7) die Feldkonfigurationen der verschiedenen TE- und TM- Moden im Hohlleiter. Im Rahmen dieser Arbeit wurden rechteckige Hohlleiter benutzt, für welche sich die Gln. (8) und (9) analytisch lösen lassen. Die Eigenwerte $\gamma_{m,n}$ für die TE_{mn} - bzw. die TM_{mn} -Mode lauten mit $k_{z,m} = m\pi/a$ und $k_{y,n} = n\pi/b$

$$\gamma_{m,n} = \sqrt{k_{z,m}^2 + k_{y,n}^2}. \quad (10)$$

Dabei sind a und b die Höhe und die Breite des Hohlleiters (siehe Abb. 1) und $m, n = 1, 2, 3 \dots$ für TM-Moden und $m, n = 0, 1, 2 \dots$ mit $(m, n) \neq (0, 0)$ für TE-Moden. Für $b > a$ ist die erste Mode somit die TE_{01} -Mode mit

$$\gamma_{0,1} = \frac{\pi}{b} \quad (11)$$

und den Feldern

$$B_x = B_0 \cos(k_y y) \quad (12)$$

und

$$\vec{E}_t = E_0 \sin(k_y y) \vec{e}_z \quad (13)$$

mit $E_0 = i/\gamma^2 \frac{\omega}{c} k_y B_0$. Wie man sehen kann, erfüllt \vec{E}_t an den Wänden des Wellenleiters in der xy -Ebene die Dirichlet-Randbedingung.

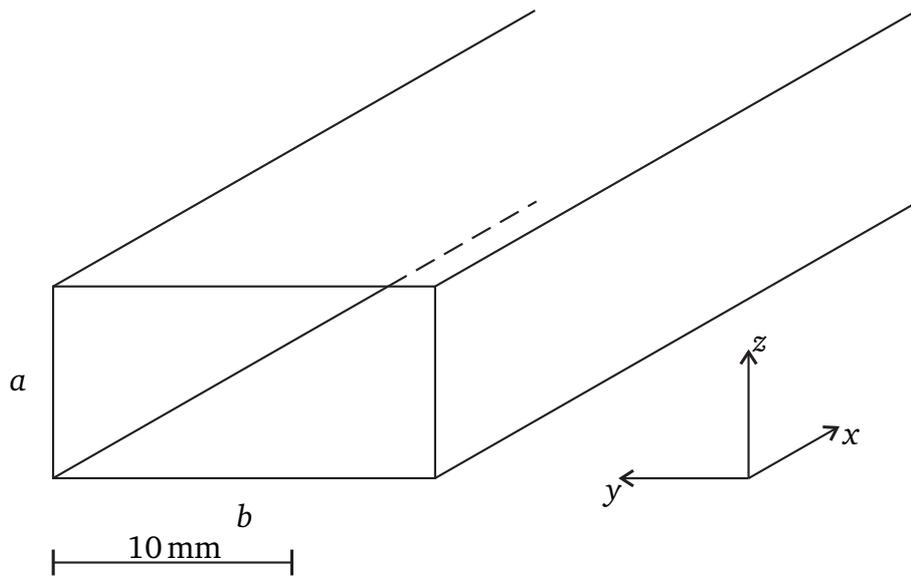


Abbildung 1: Skizze eines rechteckigen Hohlleiters mit Koordinatenachsen

2.1.3 Kritische Frequenz eines Hohlleiters

Wichtig für die Einsatzmöglichkeiten eines Hohlleiters sind die sogenannten kritischen Frequenzen jeder Mode, unterhalb welcher für diese keine Propagation innerhalb des Hohlleiters möglich ist. Diese ergeben sich aus den Eigenwerten γ_n von Glg. (8) für TM-Moden bzw. aus Glg. (9) für TE-Moden. Nach Glg. (5) ist die Propagationskonstante k_x für die n -te Mode bei der Frequenz f

$$k_x = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2} \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi f}{c} . \quad (14)$$

Für $k > \gamma_n$ nimmt k_x rein reelle Werte an, so dass die Mode innerhalb des Hohlleiters gemäß $\exp(\pm i k_x x)$ propagieren kann. Für $k < \gamma_n$, d.h. unterhalb der kritischen Frequenz

$$f_{\text{krit},n} = \frac{c}{2\pi} \gamma_n, \quad (15)$$

wird die Wellenzahl k_x rein imaginär und die Felder fallen exponentiell mit $\exp(-|k_x|x)$ ab, wobei x dem Abstand zur Quelle entspricht. Dies entspricht einem evaneszenten Feld. Im Falle des hier betrachteten rechteckigen Hohlleiters ist somit unterhalb der kritischen Frequenz der ersten Mode,

$$f_{\text{krit},n} = \frac{c}{2b}, \quad (16)$$

überhaupt keine Wellenausbreitung möglich. Die Intensität $I \sim |\vec{E}|^2$ im Hohlleiter fällt dementsprechend ausgehend von der Quelle mit $\exp(-x/\delta)$ ab, wobei die Zerfallslänge δ

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n^2 - k^2}} = \frac{c}{4\pi\sqrt{f_{\text{krit}}^2 - f^2}} \quad (17)$$

ist, welche für $f \nearrow f_{\text{krit},n}$ gegen unendlich geht. Wenn die Länge des Hohlleiters in derselben Größenordnung wie die Zerfallslänge δ liegt, d.h. insbesondere in der Nähe der kritischen Frequenz, kann Energie durch Tunneln übertragen werden.

2.2 Gebundene Zustände in geknickten Hohlleitern

Drei Typen von Wellenleitern, in welchen gebundene Zustände existieren, sind z.B. in Abb. 2 dargestellt. In Quantendrähten mit einer derartigen Geometrie wird die Ausbreitung eines Elektrons durch die Schrödinger-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingung,

$$(\Delta_t + k^2)\psi = 0 \quad \text{mit} \quad \psi|_{\partial S} = 0, \quad (18)$$

beschrieben [7], wobei $k = \sqrt{2m_e E}/\hbar$, m_e die Masse und E die Energie des Elektrons sind, ∂S die Wände des Wellenleiters bezeichnet und ψ die Wellenfunktion des Elektrons. Diese Schrödinger-Gleichung ist mathematisch äquivalent zu der Helmholtz-Gleichung für das elektrische Feld E_x einer TE_{01} -Mode in einem Hohlleiter gleicher Form mit rechteckigem Querschnitt. Daher lassen sich experimentelle Ergebnisse aus den Untersuchung von Hohlleitern auf Quantendrähte übertragen [13].

Wenn ein Hohlleiter einen variierenden Querschnitt besitzt, kann unterhalb seiner kritischen Frequenz unter bestimmten Bedingungen in ihm eine Mode eingefangen werden, d.h. es können gebundene Zustände existieren. Dies lässt sich für einen Wellenleiter mit einer Verdickung, wie in Abb. 2a) gezeigt, wie folgt erklären: Aufgrund des größeren Durchmessers können sich dort stehende Wellen einer größeren Wellenlänge als $\lambda = 2b$ (kleinerer Frequenz als der kritischen Frequenz) ausbilden, die in den dünneren Enden mit der Breite b nicht propagieren können. Aber auch in einem gebogenem Wellenleiter mit konstanter Breite wie in Abb. 2b) existiert mindestens ein gebundener Zustand [12]. In einem scharf geknickten Wellenleiter, wie er im Folgenden untersucht wird, ist der Querschnitt im Knick des Wellenleiters größer als in seinen geraden Stücken und ändert sich mit dem Winkel des Knicks. Für diesen wurden sogar mehrere gebundene Zustände vorhergesagt [14, 17], deren Anzahl vom Winkel abhängt. Die Anzahl der Zustände, die bis zu einer bestimmten Frequenz (hier der kritischen Frequenz) existieren, skaliert ähnlich wie in einem geschlossenen Resonator mit der zur Verfügung stehenden Fläche bzw. hier dem Querschnitt des Bereichs in der Spitze. Für den n -ten gebundenen Zustand unterhalb der kritischen Frequenz wurde ein kritischer Winkel $\alpha_{\text{krit}}^{(n)}$ vorhergesagt (im Folgenden Entstehungswinkel genannt), ab dem er existiert. Die Frequenz der gebundenen Zustände in Abhängigkeit des Winkels α wurden numerisch berechnet [16]. Abbildung 3 zeigt Aufteilung des Hohlleiterwinkels in drei Regionen und die verwendeten Koordinatensysteme, welche für die numerische Berechnung verwendet wurden. Mittels dieser Aufteilung lassen sich in den drei Bereichen I, II und III jeweils unabhängige Ansätze Ψ_I , Ψ_{II} und Ψ_{III} für die Wellenfunktion wählen. Die drei Ansätze werden entlang der gemeinsamen Grenzen angepasst, indem man fordert, dass dort ihre Werte stetig sind, d.h.

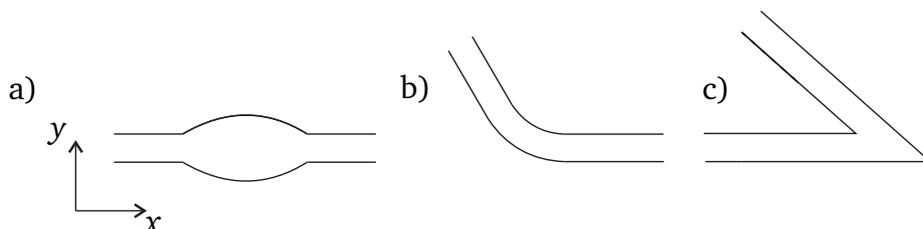


Abbildung 2: Dargestellt sind drei verschiedene Typen von Wellenleitern. a) Wellenleiter mit einer Verdickung, b) gebogener und c) scharf geknickter Wellenleiter

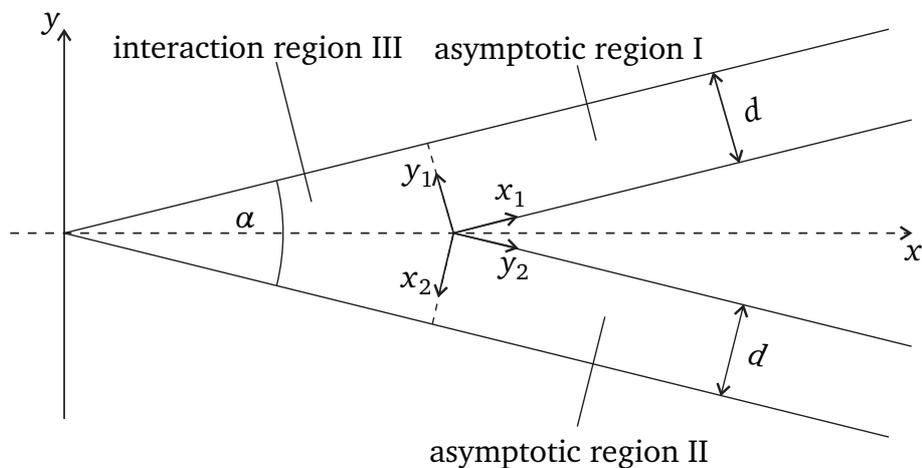


Abbildung 3: Die Abbildung zeigt die Aufteilung des Hohlleiterwinkels in drei Gebiete und die entsprechenden Koordinatensysteme, die zur numerischen Berechnung der Eigenfrequenzen der gebundenen Zustände definiert wurden [16].

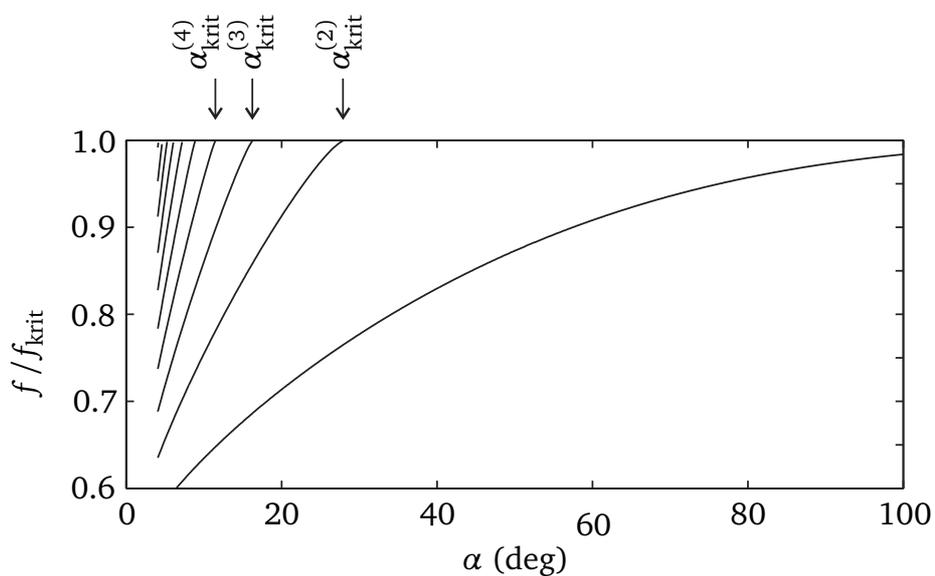


Abbildung 4: Berechnete Frequenzen (in Einheiten der kritischen Frequenz) der gebundenen Zustände in einem scharf geknickten Hohlleiter mit Winkel α . Die Pfeile zeigen die Entstehungswinkel $\alpha_{\text{krit}}^{(n)}$ des 2., 3. und 4. gebundenen Zustands an [16].

$$\Psi_{\text{III}}|_{x_1=0} = \Psi_{\text{I}}|_{x_1=0} \quad \Psi_{\text{III}}|_{y_2=0} = \Psi_{\text{II}}|_{y_2=0}, \quad (19)$$

und dass die Normalenableitungen (x_1 -Richtung bzw. y_2 -Richtung) übereinstimmen,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Psi_{\text{III}}|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi_{\text{I}}|_{x_1=0} \quad \frac{\partial}{\partial y_2} \Psi_{\text{III}}|_{y_2=0} = \frac{\partial}{\partial y_2} \Psi_{\text{II}}|_{y_2=0}. \quad (20)$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird für die asymptotischen Regionen I und II ein allgemeiner Streuansatz mit Dirichlet-Randbedingungen entlang der Wände gewählt und für die Wechselwirkungsregion III ein Ansatz, der entlang der äußeren Wände verschwindet. Dieselbe numerische Methode wurde auch in [18] verwendet. Die so berechneten Frequenzen sind in Abb. 4 dargestellt. Für alle Winkel $\alpha < 180^\circ$ existiert mindestens ein gebundener Zustand. Ab $\alpha_{\text{krit}}^{(2)} \approx 28^\circ$ existiert ein zweiter, ab $\alpha_{\text{krit}}^{(3)} \approx 16^\circ$ ein dritter gebundener Zustand und so fort.

Solche gebundenen Zustände wurden für idealisierte Systeme, d.h. für unendlich lange Wellenleiter, berechnet. Im Experiment haben die Wellenleiter eine endliche Länge und sind deshalb an ein Kontinuum von Zuständen gekoppelt, z.B. durch Elektroden im Falle von Quantendrähten oder an den freien Raum bei Mikrowellenhohlleitern mit offenen Enden, so dass diese Zustände durch Tunneln ins Kontinuum zerfallen können [11]. Im Folgenden wird deshalb im Zusammenhang mit experimentellen Ergebnissen von quasigebundenen Zuständen gesprochen. Diese führen unterhalb der Propagationsschwelle in den Transmissionsspektren des Wellenleiters zu scharfen Resonanzen [7, 9].

2.3 Messung von Frequenzspektren

Die Messung von Frequenzspektren erfolgt mittels eines vektoriellen Netzwerkanalysators (VNA) vom Typ PNA 5230A von Agilent Technologies. Dazu wird ein Signal mit Frequenz f mit einer Antenne a in den Hohlleiter eingekoppelt und mit einer zweiten Antenne b wieder ausgekoppelt. Der VNA misst das Verhältnis zwischen der bei Antenne a ein- und bei Antenne b ausgekoppelten Leistung,

$$|S_{ba}(f)|^2 = \frac{P_{b,\text{aus}}}{P_{a,\text{ein}}}. \quad (21)$$

Außerdem misst der VNA die Phase zwischen ein- und ausgekoppeltem Signal, so dass man den komplexen S -Parameter $S_{ba}(f)$ erhält. Bei den Eigenfrequenzen f_n von quasigebundenen Zuständen zeigt das Frequenzspektrum Maxima, d.h. Resonanzen. Isolierte Resonanzen besitzen eine Breit-Wigner-Form [19, 20],

$$S_{ba}(f) = \delta_{ba} - i \frac{\sqrt{\Gamma_n^a \Gamma_n^b}}{f - f_n + i \frac{\Gamma_n}{2}}. \quad (22)$$

Die Partialbreiten Γ_n^a bzw. Γ_n^b sind proportional zu der von den Antennen ausgekoppelten Leistung bzw. zur elektrischen Feldintensität am Ort der Antenne. Die Gesamtbreite Γ_n der Resonanz ergibt sich aus der Summe

$$\Gamma_n = \Gamma_n^a + \Gamma_n^b + \Gamma_\Omega + \Gamma_{\text{rad}}, \quad (23)$$

wobei Γ_Ω die Ohm'schen Verluste in den nicht ideal-leitenden Wänden und Γ_{rad} Strahlungsverluste an den offenen Enden der Hohlleiter beinhaltet. Die Güte einer Resonanz ist definiert als das Verhältnis der gespeicherten Energie zur pro Schwingungszyklus verlorenen Energie,

$$Q_n = \frac{f_n}{\Gamma_n}. \quad (24)$$

Sie ist proportional zur Lebensdauer τ einer Resonanz.

2.4 Messung von Intensitätsverteilungen

Intensitätsverteilungen in einem Resonator können mit der sogenannten Störkörpermethode gemessen werden. Ein kleiner Störkörper, der in einen Resonator eingebracht wird, verursacht eine Frequenzverschiebung der Eigenzustände. Wenn er deutlich kleiner ist als die Wellenlänge, ergibt sich die Verschiebung der Resonanzfrequenz Δf als Funktion der Felder \vec{E} und \vec{B} des ungestörten Eigenzustands am Ort des Störkörpers, des Materials und der Form des Störkörpers [21, 22].

Der in dieser Arbeit verwendete dielektrische Störkörper aus magnetischem Gummi kann nicht an das hochfrequente Magnetfeld koppeln [23], so dass sich der Zusammenhang zwischen der Frequenzverschiebung und dem elektromagnetischen Feld vereinfacht zu

$$\Delta f \sim -|\vec{E}|^2. \quad (25)$$

Die Intensitätsverteilung der elektrischen Feldstärke einer Mode im Hohlleiter (siehe Abschnitt 3.2) kann man folglich bestimmen, indem man einen solchen Störkörper durch den Resonator bewegt und für jede Position die Verschiebung der Resonanzfrequenz misst.

3 Experimentelle Ergebnisse

3.1 Experimenteller Aufbau

Abbildung 5 zeigt den Aufbau der in dieser Arbeit verwendeten scharf geknickten Hohlleiter (im folgenden Hohlleiterwinkel genannt). Diese wurden aus Messinghohlrohren mit rechteckigem Querschnitt des Typs WG18 der Firma Flann Microwaves hergestellt. Die Hohlrohre wurden auf die entsprechende Länge gebracht, im Bereich der Spitze auf den Winkel $\alpha/2$ auf Gehrung zugeschnitten und anschließend zusammen gelötet. Es wurden insgesamt neun Hohlleiterwinkel mit verschiedenen Öffnungswinkeln α hergestellt und untersucht. Drei der Winkel wurden nahe bei theoretisch berechneten Entstehungswinkeln gewählt, siehe Abb. 4. Diese Berechnungen [16] (siehe Abb. 4) wurden nach der Methode aus [18] durchgeführt. Die Winkel sind in Tab. 1 aufgelistet. Alle verwendeten Hohlleiterwinkel haben ein Verhältnis von Schenkellänge l zu Spitzenlänge h von 2 zu 1 (siehe Abb. 5), bis auf den Hohlleiterwinkel $27,65^\circ$. Ein Foto des Hohlleiterwinkels mit $11,83^\circ$ Öffnungswinkel ist in Abb. 5 unten zu sehen. Die Winkel wurden mit Hilfe eines Winkelmessers mit einer Genauigkeit von $\Delta\alpha = 0,05^\circ$ bestimmt. Sieben der Hohlleiterwinkel wurden aus Hohlleitern mit einer Innenbreite von $b = (15,76 \pm 0,02)$ mm und einer Innenhöhe von $a = (7,90 \pm 0,02)$ mm hergestellt. Die kritische Frequenz der TE_{01} -Mode beträgt $f_k = (9,510 \pm 0,012)$ GHz. Zwei, die beiden Hohlleiterwinkel mit einem Öffnungswinkel von $11,83^\circ$ und $11,00^\circ$, wurden aus Hohlleitern welche aus einer anderen Lieferung stammen mit einer anderen Breite von $b = (15,80 \pm 0,02)$ mm hergestellt und haben daher eine kritische Frequenz von $f_k = (9,487 \pm 0,012)$ GHz.

Die Antennen bestehen aus einem dünnen Metalldraht, der in den Hohlleiter hineinragt. Die Antennenlänge wurde so angepasst, dass sie nur ca. 1 mm in den Hohlleiter hineinragen, um eine zu starke Kopplung zu verhindern. Zur Verbindung zwischen den Antennen und dem VNA

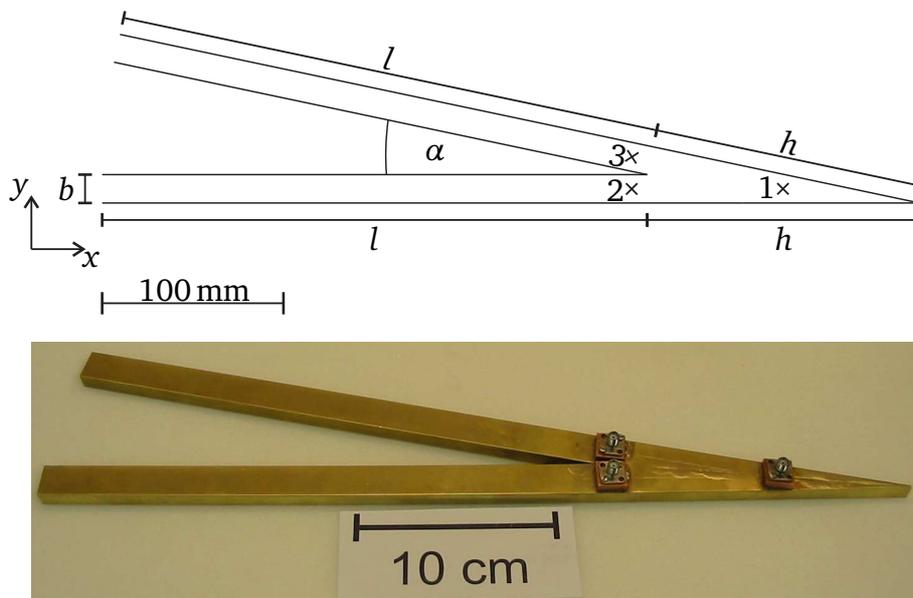


Abbildung 5: Oben: Schematische Skizze des geknickten Hohlleiters mit $\alpha = 11,83^\circ$. Dabei bezeichnet b die Breite des geraden Stücks des Hohlleiterwinkels, l die Schenkellänge und h die Spitzenlänge. Die Kreuze zeigen die Positionen der Antennen an. Unten: Foto des Hohlleiterwinkels $11,83^\circ$.

Tabelle 1: Auflistung der hergestellten Winkel mit zugehöriger Schenkellänge l . Die Winkel wurden mit einer Genauigkeit von $0,05^\circ$ bestimmt.

Winkel α (deg)	Schenkellänge l (mm)
28,40	122,2
27,65	356,7
26,50	131,6
16,40	211,4
15,95	224,8
14,55	240,0
11,83	300,1
11,00	328,2
9,65	361,2

wurden HF-Koaxialkabel verwendet. Die Antennenpositionen wurden in der Nähe des Knicks gewählt, da die erwarteten quasigebundenen Zustände dort lokalisiert sind. Die Messung der Spektren sowie der Intensitätsverteilungen erfolgte mit den Antennen 2 und 3 (siehe Abb. 5), da mit dieser Antennenkombination alle vorhergesagten Zustände angeregt werden konnten.

Die Messung der Intensitätsverteilungen wurde wie in Abschnitt 2.4 beschrieben mit der Störkörpermethode durchgeführt. Als Störkörper wurde ein kleiner Zylinder aus magnetischem Gummi ($\varnothing = (2,00 \pm 0,02)$ mm, $h = (2,58 \pm 0,02)$ mm) verwendet, welcher von einem externen Führungsmagneten durch den Hohlleiter bewegt wurde. Der Führungsmagnet wurde mit einer zweiachsigen CNC-Steuerungseinheit (Computerized Numerical Control) gesteuert, mit der ein vordefinierter Weg von Messpunkten abgefahren werden kann [24]. Der Abstand zwischen den Messpunkten betrug 2,5 mm, so dass bei den Messungen zwischen 1990 und 5594 Störkörperpositionen angefahren wurden. Aufgrund der zu überwindenden Reibungskraft hinkt der Störkörper dabei der Position des Führungsmagnets leicht hinterher. Um dies auszugleichen wurde jeder Messpunkt zweimal aus unterschiedlichen Richtungen angefahren und über die Messwerte aus Hin- und Rückweg gemittelt.

3.2 Frequenzspektrum und Intensitätsverteilung eines geknickten Hohlleiters

Das Frequenzspektrum des Hohlleiterwinkels mit $\alpha = 11,83^\circ$ in Abb. 6 zeigt unterhalb der kritischen Frequenz der TE_{01} -Mode, welche in Abb. 6 mit dem linken durchgezogenen Pfeil markiert ist, bei 6,142 GHz, 7,417 GHz, 8,530 GHz und 9,490 GHz vier markante Resonanzen. Sie besitzen Güten im Bereich von $Q \approx 2000$. Drei der Resonanzen befinden sich unterhalb, die vierte Resonanz in der Nähe der kritischen Frequenz und die Größe der Güten liegen im Bereich derjenigen von normalleitenden, geschlossenen Resonatoren. Dies lässt den Schluss zu, dass dies die gesuchten quasigebundenen Zustände sind. Oberhalb der kritischen Frequenz ist eine regelmäßige Folge von breiten Resonanzen zu sehen. Die Struktur des in Abb. 6 gezeigten Frequenzspektrums ist typisch für alle untersuchten Hohlleiterwinkel, lediglich die Anzahl und die Frequenzen der Resonanzen unterscheiden sich. Für weitere Untersuchungen und um unsere Vermutung zu bestätigen wurden bei diesen Frequenzen die Intensitätsverteilungen gemessen.

Die Abbildungen 7a)-d) zeigen die Intensitätsverteilungen der vier scharfen Resonanzen unterhalb von f_{krit} aus Abb. 6. Die vertikalen Streifen, die teilweise auf den Bildern zu erkennen

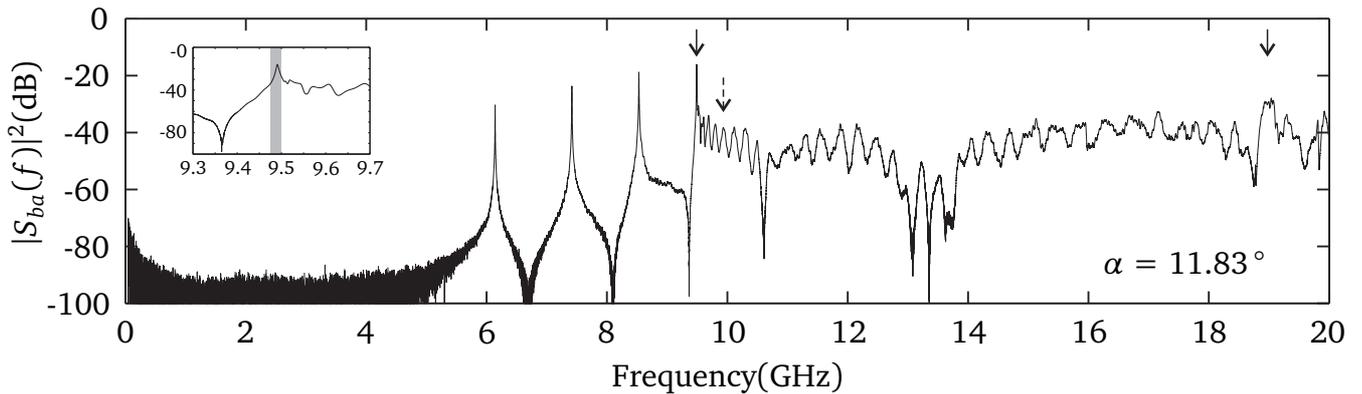


Abbildung 6: Transmissionsspektrum von 0,045-20 GHz des geknickten Hohlleiterwinkels mit $\alpha = 11,83^\circ$. Der linke durchgezogene Pfeil markiert die kritische Frequenz der TE_{01} -Mode (9,510 GHz) und der rechte durchgezogene Pfeil die der TE_{10} -Mode (19,020 GHz). In der Vergrößerung ist der Bereich um die kritische Frequenz der TE_{01} -Mode zu sehen. Das graue Band ist das Fehlerintervall der kritischen Frequenz. Die vierte scharfe Resonanz des Spektrums liegt genau in diesem Fehlerintervall. Der gestrichelte Pfeil markiert die Resonanz 9,929 GHz, deren Intensitätsverteilung in Abb. 7e) dargestellt ist.

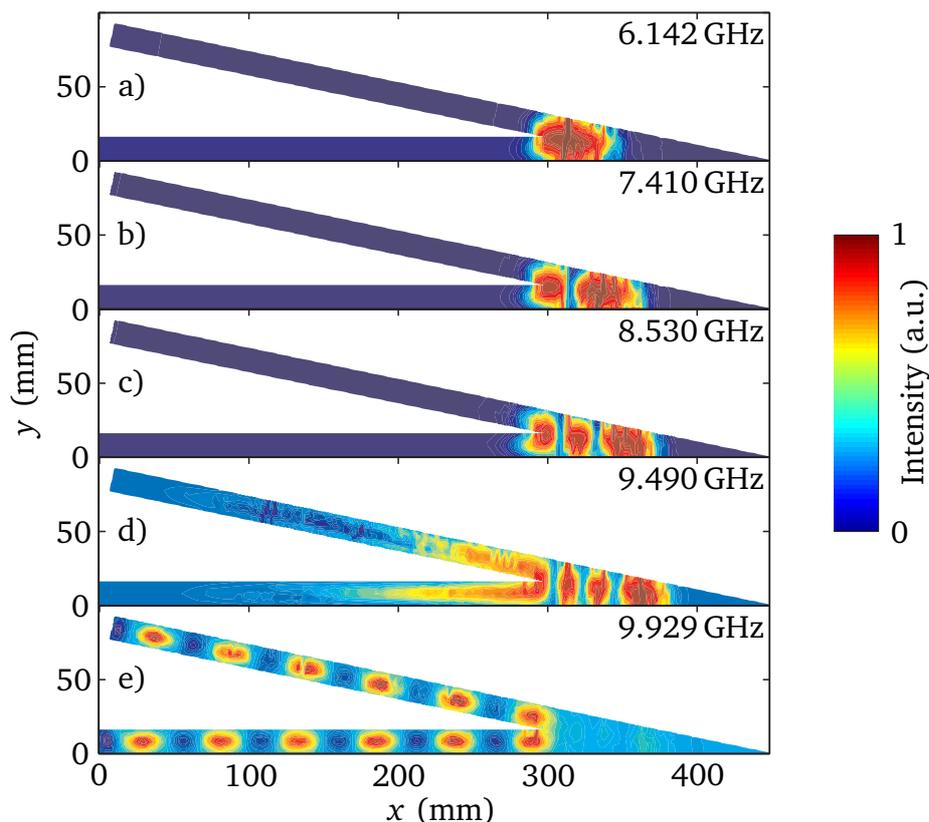


Abbildung 7: Die Bilder a)-d) zeigen die Feldverteilungen der Resonanzen unterhalb der kritischen Frequenz des Hohlleiterwinkels mit einem Winkel von $\alpha = 11,83^\circ$. Das unterste Bild zeigt exemplarisch die Feldverteilung für eine Resonanz oberhalb der kritischen Frequenz, also im Leitungsbereich des Hohlleiters.

sind, entstehen aufgrund von Verunreinigungen im Hohlleiter durch Lötgrate. An diesen bleibt der Störkörper während der Messung hängen, so dass die Position des Messpunktes nicht mehr mit der des Störkörpers übereinstimmt. Die gemessenen Intensitätsverteilungen der ersten drei Resonanzen (Abb. 7a)-c)) zeigen deutlich eine Lokalisierung in der Spitze des Hohlleiterwinkels. Dies bestätigt die Vermutung, dass es sich hier um die gesuchten quasigebundenen Zustände handelt. Die vierte Mode ist ebenfalls in der Spitze lokalisiert, ragt allerdings sehr weit in die Schenkel des Hohlleiters hinein. Dies liegt vermutlich daran, dass die Frequenz der Resonanz sehr nah an der kritischen Frequenz liegt. Das sehr weite Eindringen des Feldes in das gerade Stück des Hohlleiters ist, wie sich weiter unten zeigen wird (siehe Abschnitt 3.3), ein Charakteristikum der quasigebundenen Zustände in der Nähe ihres Entstehungswinkels. Die Intensitätsverteilung eines ungebundenen Resonanzzustands (gestrichelter Pfeil in Abb. 6) ist in Abb. 7e) zu sehen. Er entsteht durch teilweise Reflexion der elektromagnetischen Wellen an den offenen Enden des Hohlleiters, wie die Intensitätsverteilung zeigt, welche die Form einer zwischen den offenen Enden stehenden Welle besitzt. Sie ist typisch für Resonanzen oberhalb der kritischen Frequenz.

Anhand der Gesamtübersicht über alle gemessenen Resonanzfrequenzen der quasigebundenen Zustände in Abb. 8 ist deutlich zu sehen wie gut die experimentellen Werte (Punkte) mit den theoretischen Vorhersagen [16], dargestellt als Linien, übereinstimmen. Der Fehler der Messwerte von f/f_{krit} liegt im Bereich von $1 \cdot 10^{-4}$, der des Winkels im Bereich von $0,05^\circ$. Die Fehler der Datenpunkte in Abb. 8 sind daher kleiner als die Ausdehnung der Punkte. Die Frequenz der quasigebundenen Zustände fällt mit kleiner werdendem Winkel ab. Die gemessenen Frequenzen der vierten Resonanz bei $11,83^\circ$ liegt knapp oberhalb der kritischen Frequenz, genauso die der zweiten Resonanz bei $28,4^\circ$, während die der dritten Resonanz bei $16,40^\circ$ knapp unterhalb der kritischen Frequenz liegt. Im Rahmen der Messgenauigkeit stimmen diese Werte gut mit den vorhergesagten Entstehungswinkeln der gebundenen Zustände überein.

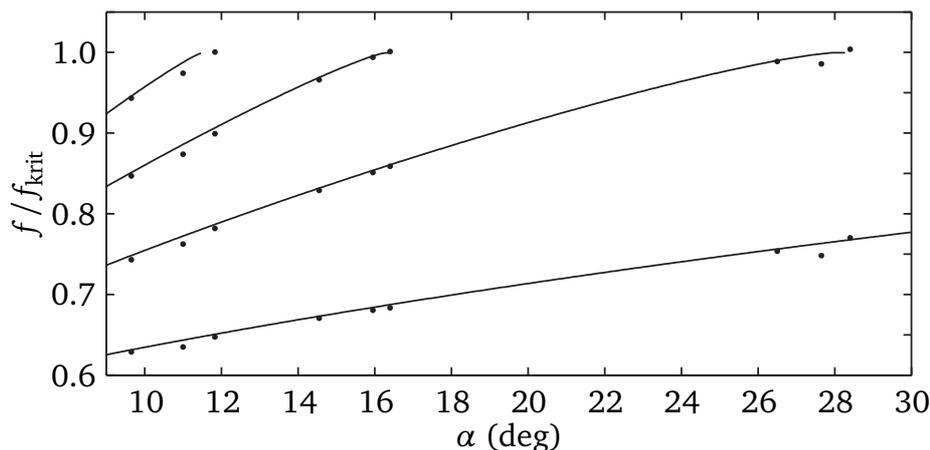


Abbildung 8: Die Abbildung zeigt die Entwicklung der Eigenfrequenzen (in Einheiten der kritischen Frequenz) der quasi-gebundenen Zustände in Abhängigkeit des Winkels α . Die Linien zeigen den theoretisch vorhergesagten Verlauf der gebundenen Zustände. Die experimentell ermittelten Frequenzen sind als Punkte dargestellt. Die gemessenen Frequenzen bestätigen im Großen und Ganzen die theoretischen Berechnungen, auch in der Nähe der kritischen Frequenz.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Existenz quasigebundener Zustände, die in der Spitze lokalisiert sind, bestätigt wurde und deren Frequenzen sehr gut mit der Theorie übereinstimmen. Die berechnete Abhängigkeit der Frequenzen der quasigebundenen Zustände bei Variation des Winkels α und ebenso die theoretisch vorhergesagten Entstehungswinkel stimmen mit den Messwerten überein.

3.3 Entwicklung der quasigebundenen Zustände am Entstehungswinkel

Im folgendem wird die Entwicklung der quasigebundenen Zustände in der Nähe der kritischen Frequenz bzw. ihres Entstehungswinkels näher untersucht. Die Abb. 9-11 geben einen Überblick über die Entwicklungen des zweiten, dritten bzw. vierten quasigebundenen Zustands. Die Feldverteilung in der Spitze des Hohlleiters bleibt bei wachsendem Winkel nahezu unverändert, wohingegen die Frequenz steigt und die Zerfallslänge und damit das Eindringen der Felder in die

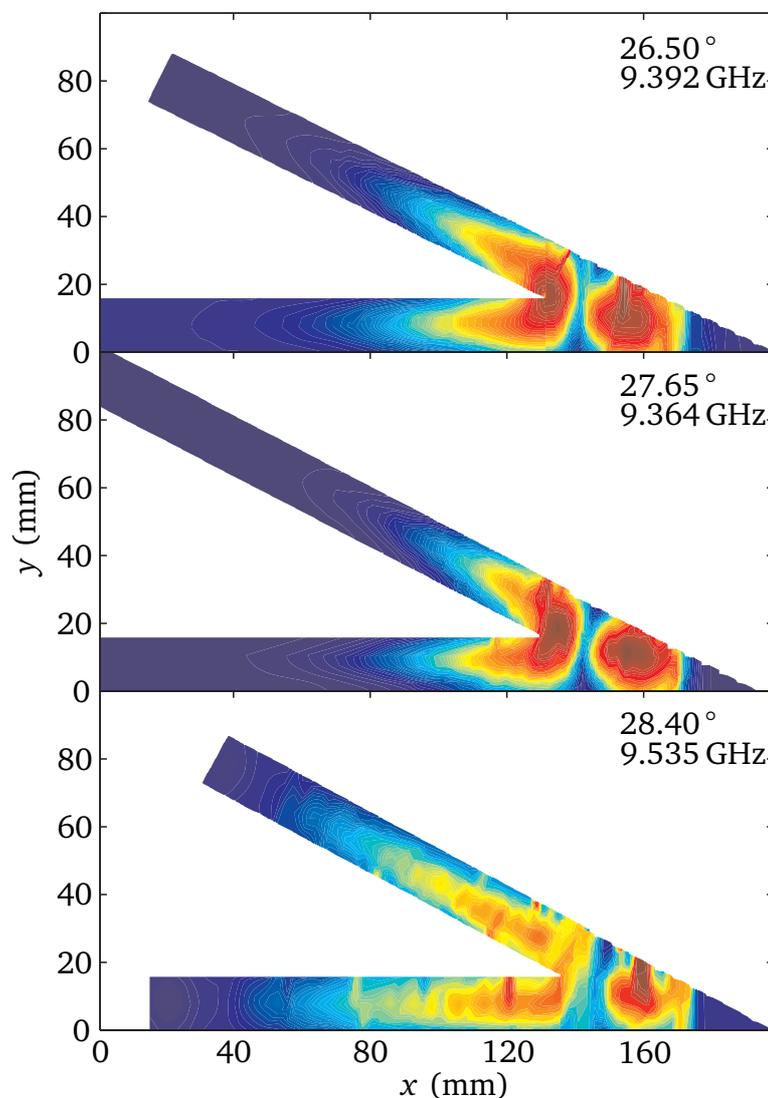


Abbildung 9: Die Entwicklung des zweiten Resonanzzustands nahe bei seinem Entstehungswinkel. Die Farbskala wurde wie in Abb. 7 gewählt. Mit steigendem Winkel nehmen Frequenz und Zerfallslänge deutlich zu, d.h. die Felder dringen immer weiter in die Schenkel ein.

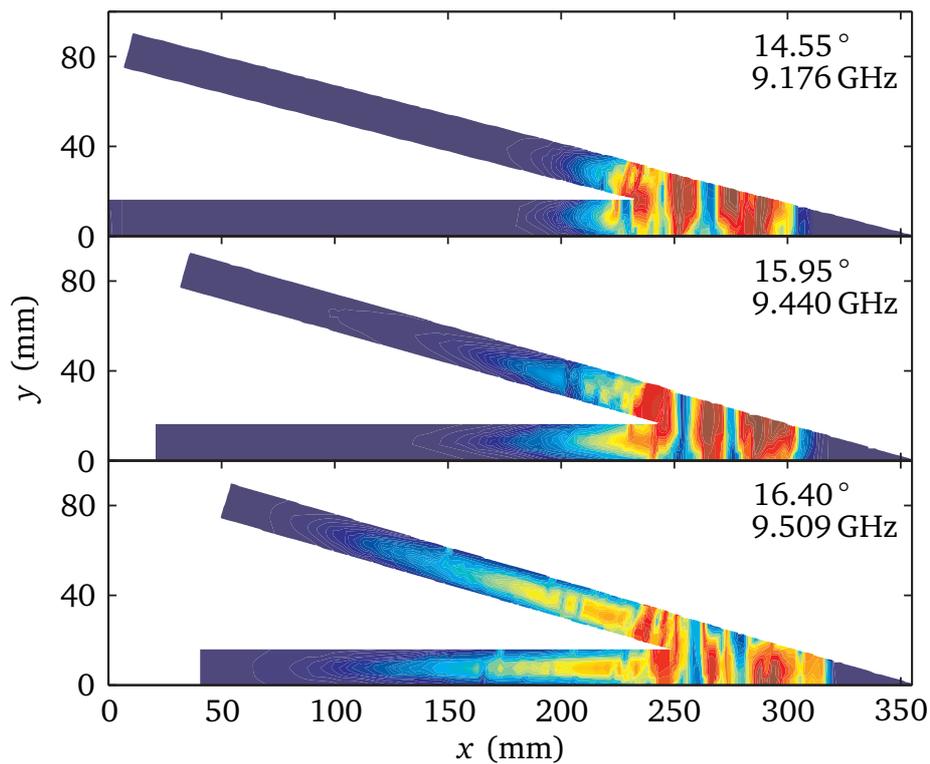


Abbildung 10: Die Entwicklung des dritten Resonanzzustands nahe bei seinem Entstehungswinkel. Die Farbskala wurde wie in Abb. 7 gewählt. Mit steigendem Winkel nehmen Frequenz und Zerfallslänge deutlich zu.

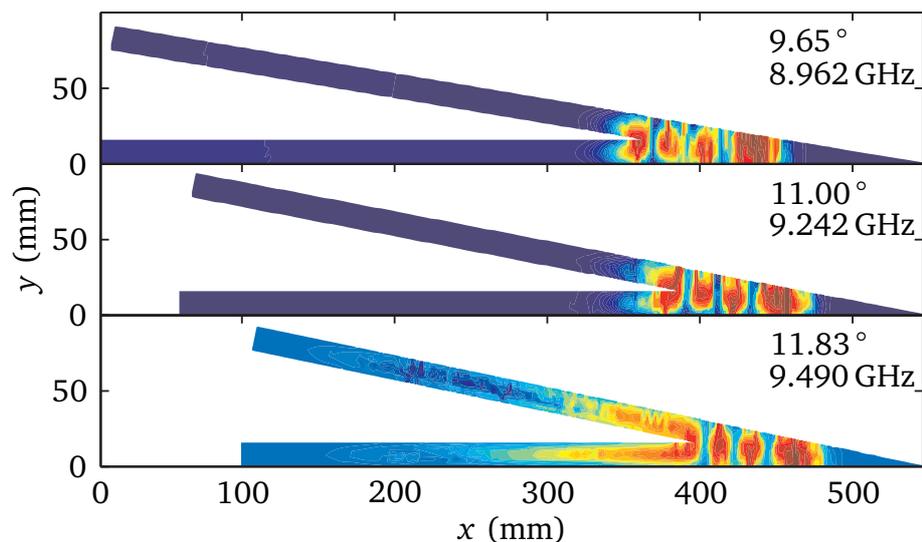


Abbildung 11: Die Entwicklung des vierten Resonanzzustands nahe bei seinem Entstehungswinkel. Die Farbskala wurde wie in Abb. 7 gewählt. Mit steigendem Winkel nehmen Frequenz und Zerfallslänge deutlich zu.

Schenkel der Hohlleiterwinkel deutlich zunimmt. Diese Entwicklung lässt sich damit erklären, dass mit steigendem Winkel die Fläche im Knick geringer wird und somit die Resonanzfrequenz steigt. Die Zerfallslänge steigt dementsprechend stark an und strebt in der Nähe des kritischen Winkels gegen die Schenkellänge. Oberhalb der kritischen Frequenz kann die Mode propagieren und nach außen abstrahlen. Trotz der großen Zerfallslängen nehmen die Güten der Zustände nur minimal ab. Der Übergang vom quasigebundenen zum ungebundenen Zustand bei der kritischen Frequenz scheint nicht plötzlich, sondern stetig abzulaufen. Daher ist im Experiment eine klare Unterscheidung zwischen quasigebundenen und ungebundenen Zuständen nicht möglich. Der Einfluss der endlichen Schenkellänge auf den Übergang ist ebenfalls unklar.

3.4 Zerfallslängen der quasigebundenen Zustände

Die Zerfallslängen wurden aus den gemessenen Intensitätsverteilung extrahiert, um sie mit den theoretischen Zerfallslängen zu vergleichen (siehe Abschnitt 2.1.3).

Abbildung 12 zeigt den Intensitätsverlauf des zweiten quasigebundenen Zustands im Hohlleiterwinkel mit $27,65^\circ$ in Abhängigkeit der Position s im Schenkel (siehe Abb. 12a)) in linearer (Abb. 12b)) und logarithmischer Skala (Abb. 12c)). Grundsätzlich lässt er sich in drei Abschnitte einteilen: einen Anfangsbereich bis ca. 20 mm, der in der logarithmischen Darstellung als flaches Anfangsniveau zu sehen ist, einen zweiten Bereich bis ca. 100 mm, in dem die Intensität exponentiell abfällt und einen letzten Bereich ab ca. 100 mm, der von Rauschen dominiert wird. Für den zweiten Bereich, der in logarithmischer Darstellung linear ist, wurde durch eine lineare Regression die Steigung und damit die Zerfallslänge der Exponentialfunktion bestimmt. Das Resultat der Anpassung ist in den Abbn. 12b) und c) als gestrichelte Linie dargestellt. Die Steigung der Regressionsgerade liefert für die Zerfallslänge $\delta_{\text{exp}} = 16,23$ mm, welche mit der theoretisch berechneten Zerfallslänge von $\delta_{\text{theo}} = 14,37$ mm recht gut übereinstimmt. Der Fehler der experimentellen Zerfallslänge ergibt sich aus der Unsicherheit der linearen Regression, welche nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet wurde. Der Fehler der theoretischen Zerfallslänge lässt sich aus Glg. (17) berechnen zu

$$\Delta\delta_{\text{theo}} = \frac{c \cdot f_{\text{krit}}}{4\pi(f_{\text{krit}}^2 - f^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \Delta f_{\text{krit}}. \quad (26)$$

Für die Messungen der Intensitätsverteilung wurden in jedem Schenkel Messpunkte entlang 8 paralleler Linien verwendet. Für jede dieser wurde die Zerfallslänge bestimmt. Aus der Mittlung über die 16 resultierenden Werte ergab sich der Wert für die Zerfallslänge einer untersuchten Resonanz. Als Fehler von δ_{exp} wird die Standardabweichung σ der 16 Werte angegeben. Tabelle 2 listet alle untersuchten Resonanzen mit zugehörigem Winkel α , theoretischer und experimenteller Zerfallslänge δ_{theo} bzw. δ_{exp} sowie das Verhältnis zwischen experimenteller Zerfallslänge und Schenkellänge l des Hohlleiterwinkels auf.

Die experimentell ermittelten Zerfallslängen stimmen im Rahmen der Fehler gut mit den theoretischen Werten überein. Die meisten Werte liegen innerhalb von ein bis zwei Fehlerbreiten. Lediglich ein extremer Ausreißer ist zu benennen, der dritte quasigebundene Zustand beim Hohlleiterwinkel $\alpha = 16,40^\circ$. Seine Frequenz von 9,509 GHz liegt so nah an der kritischen Frequenz, dass der Fehler der theoretischen Zerfallslänge 3694,9 mm beträgt, was eine sinnvolle Bewertung des Ergebnisses unmöglich macht. Die geringe Differenz zwischen der Resonanzfrequenz und der kritischen Frequenz führt in der Fehlerrechnung zu Glg. (17) zu einem sehr

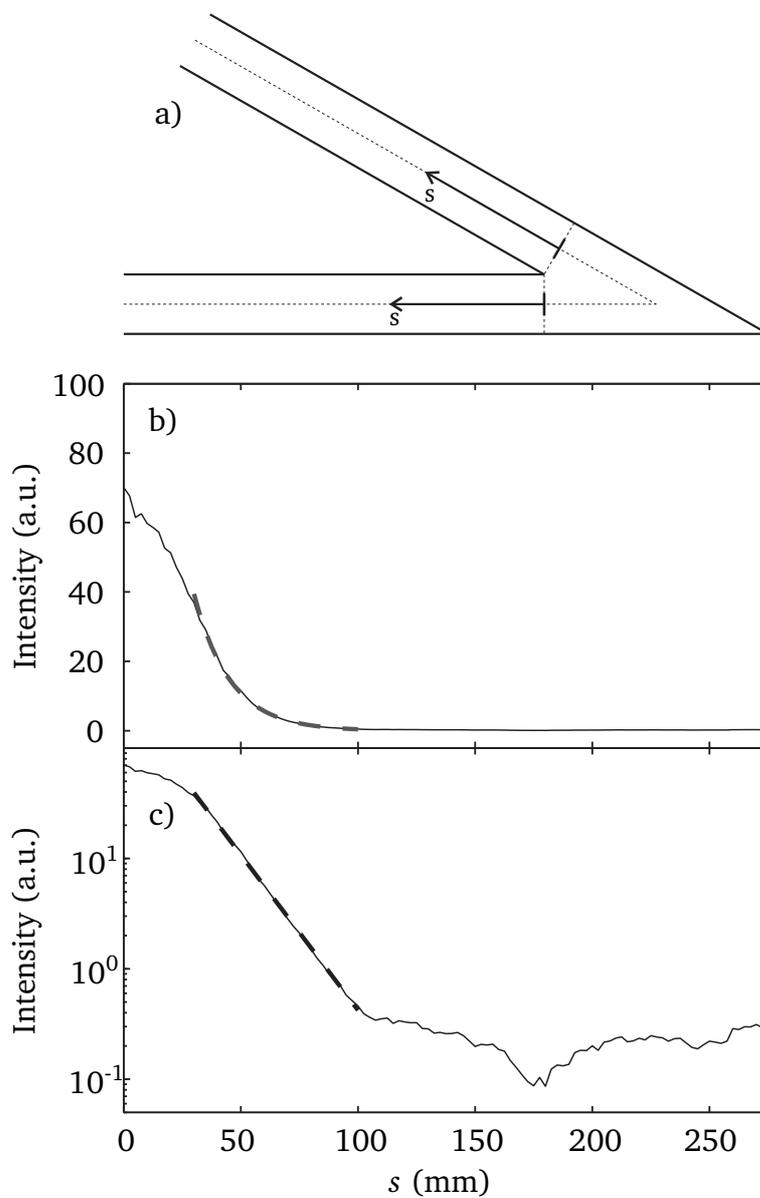


Abbildung 12: In a) wird die Skizze eines Hohlleiterwinkels (nicht maßstabsgetreu) mit der verwendeten Koordinate s entlang des Schenkels gezeigt. Exemplarisch für die Bestimmung der Zerfallslänge werden in b) und c) die Feldintensität in Abhängigkeit von s des zweiten quasigebundenen Zustands bei $f = 9,364$ GHz im Hohlleiterwinkel mit $\alpha = 27,65^\circ$ linear und logarithmisch dargestellt. Die dick gestrichelte Linie zeigt das Resultat einer linearen Regression an den linearen Abschnitt der Kurve in c). Die Zerfallslänge, welche der Steigung der Regressionsgerade entspricht, ist $\delta_{\text{exp}} = (16,23 \pm 0,40)$ mm.

Tabelle 2: Auflistung aller untersuchten Resonanzen mit zugehörigem Winkel α , theoretischer und experimenteller Zerfallslänge δ_{theo} bzw. δ_{exp} sowie dem Verhältnis zwischen experimenteller Zerfallslänge und Schenkellänge l .

α (deg)	f_n (GHz)	δ_{theo} (mm)	δ_{exp} (mm)	δ_{exp}/l (%)
28,40	7,316	$3,93 \pm 0,01$	$3,98 \pm 0,26$	3,3
	9,535	oberhalb f_{krit}	$72,09 \pm 8,35$	59,0
27,65	7,108	$3,78 \pm 0,01$	$4,46 \pm 0,21$	1,3
	9,364	$14,37 \pm 0,50$	$16,23 \pm 0,40$	4,6
26,50	7,160	$3,81 \pm 0,01$	$3,78 \pm 0,16$	2,9
	9,392	$15,97 \pm 0,82$	$17,13 \pm 0,69$	13,0
16,40	6,493	$3,43 \pm 0,01$	keine sinnvollen Daten	
	8,159	$4,88 \pm 0,02$	$5,06 \pm 1,21$	2,4
	9,509	$166,08 \pm 923,71$	$50,59 \pm 12,66$	23,9
15,95	6,464	$3,42 \pm 0,01$	$4,04 \pm 0,10$	1,8
	8,085	$4,76 \pm 0,02$	$4,98 \pm 0,32$	2,2
	9,440	$20,70 \pm 1,79$	$25,74 \pm 5,36$	11,5
14,55	6,371	$3,38 \pm 0,01$	$3,99 \pm 0,48$	1,7
	7,875	$4,48 \pm 0,02$	$5,06 \pm 0,36$	2,1
	9,176	$9,55 \pm 0,18$	$10,85 \pm 1,05$	4,5
11,83	6,142	$3,30 \pm 0,01$	$3,95 \pm 0,26$	1,3
	7,417	$4,03 \pm 0,01$	$4,80 \pm 0,40$	1,6
	8,530	$5,75 \pm 0,04$	$6,91 \pm 0,32$	2,3
	9,490	oberhalb f_{krit}	$57,25 \pm 6,74$	19,1
11,00	6,025	$3,26 \pm 0,01$	$3,66 \pm 0,19$	1,1
	7,233	$3,89 \pm 0,01$	$4,49 \pm 0,20$	1,4
	8,290	$5,17 \pm 0,03$	$5,33 \pm 0,22$	1,6
	9,242	$11,14 \pm 0,28$	$13,18 \pm 0,67$	4,0
9,65	5,974	$3,22 \pm 0,01$	$3,09 \pm 0,71$	0,9
	7,059	$3,74 \pm 0,01$	$3,64 \pm 1,04$	1,0
	8,045	$4,70 \pm 0,02$	$4,75 \pm 1,68$	1,3
	8,960	$7,48 \pm 0,08$	$7,61 \pm 2,33$	2,1

kleinem Nenner, was diesen Fehler so groß werden lässt. Die Frequenzen des zweiten quasigebundenen Zustands im $28,40^\circ$ Hohlleiterwinkel mit einer Frequenz von 9,535 GHz und des vierten quasigebundenen Zustand im Winkel $11,83^\circ$ mit einer Frequenz von 9,490 GHz liegen beide oberhalb der jeweiligen kritischen Frequenz, wodurch sich keine theoretische Zerfallslänge berechnen lässt. Der letzte zu benennende Sonderfall ist der erste quasigebundene Zustand im Hohlleiterwinkel mit $16,40^\circ$ bei einer Frequenz von 6,493 GHz. Die Daten zu diesem Winkel zeigen teilweise starke Schwankungen in der Feldintensität auf, so dass sich bei einer theoretischen Zerfallslänge von 3,4 mm die Anpassung einer Exponentialfunktion an die Messdaten als unmöglich erwies.

Schlussfolgernd lässt sich festhalten, dass der hier angenommene und untersuchte exponentielle Abfall der evaneszenten Felder grundsätzlich mit der Theorie übereinstimmt. Lediglich in den Fällen, in denen die Zerfallslänge die Größenordnung der Schenkellänge erreicht, streuen die experimentellen Werte stark um die Theoriewerte. Ein Grund hierfür ist der Einfluss der partiellen Reflexion an den offenen Enden auf die Intensitätsverteilung. In diesen Fällen ist die Zerfallslänge auch deswegen interessant, da ein besonders starker Einfluss der quasigebundenen Zustände auf die Transmissionseigenschaften des Hohlleiters zu erwarten ist.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden quasigebundene Zustände in scharf geknickten Hohlleitern untersucht. Es wurden Hohlleiter mit Winkeln nahe dem Entstehungswinkel des 2., 3. und 4. quasigebundenen Zustandes untersucht und sowohl Frequenzspektren als auch Intensitätsverteilungen gemessen. Die resultierenden Resonanzfrequenzen stimmen gut mit den theoretischen Berechnungen [16] überein und auch die berechneten Entstehungswinkel konnten bestätigt werden. Der Übergang vom quasigebundenen zum ungebundenen Zustand scheint adiabatisch zu verlaufen, und macht sich in seiner zunehmenden Zerfallslänge bei Annäherung an die kritische Frequenz und darüber hinaus bemerkbar. Daher ist dort im Experiment eine klare Unterscheidung zwischen quasigebundenen und ungebundenen Zuständen nicht möglich.

Für weitere Untersuchungen müssen die Schenkel der Hohlleiter verlängert werden um den Einfluss einer endlichen Schenkellänge auf die Zerfallslänge der Zustände zu bestimmen. In einer weiteren zukünftigen Untersuchung könnten an die offenen Enden der Hohlleiter Einkoppler montiert werden, was der Situation bei einem Quantendraht wie in [6] entspricht. Damit kann die Transmission durch den geknickten Hohlleiter untersucht und resonantes Tunneln nachgewiesen werden.

Literatur

- [1] G. Timp, H. U. Baranger, P. deVegvar, J. E. Cunningham, R. E. Howard, R. Behringer and P. M. Mankiewich: *Propagation around a Bend in a Multichannel Electron Waveguide*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2081 (1988).
- [2] H. U. Baranger, A. D. Stone and D. P. DiVincenzo: *Resistance fluctuations in multiprobe microstructures: Length dependence and nonlocality*, Phys. Rev. B **37**, 6521 (1988).
- [3] M. L. Roukes, A. Scherer, S. J. Allen, H. G. Craighead, R. M. Ruthen, E. D. Beebe and J. P. Harbison: *Quenching of the Hall Effect in a One-Dimensional Wire*, Phys. Rev. Lett. **59**, 3011 (1987).
- [4] R. L. Schult, D. G. Ravenhall and H. W. Wyld: *Quantum bound states in a classically unbound system of crossed wires*, Phys. Rev. B **39**, 5476 (1989).
- [5] F. Lenz, J. T. Londergan, E. J. Moniz, R. Rosenfelder, M. Stingl and K. Yazaki: *Quark confinement and hadronic interactions*, Ann. Phys. (N.Y.) **170**, 65 (1986).
- [6] J. C. Wu, M. N. Wybourne, W. Yindeepol, A. Weisshaar and S. M. Goodnick: *Interference phenomena due to a double bend in a quantum wire*, Appl. Phys. Lett. **59**, 102 (1991).
- [7] C.-K. Wang, K.-F. Berggren and Z.-L. Ji: *Quantum bound states in a double-bend quantum channel*, J. Appl. Phys. **77**, 2564 (1995).
- [8] J. P. Carini, J. T. Londergan, D. P. Murdock, D. Trinkle and C. S. Yung: *Bound states in waveguides and bent quantum wires. I. Applications to waveguide systems*, Phys. Rev. B **55**, 9842 (1997).
- [9] J. P. Carini, J. T. Londergan and D. P. Murdock: *Bound states in waveguides and bent quantum wires. II. Electrons in quantum wires*, Phys. Rev. B **55**, 9852 (1997).
- [10] P. Exner and P. Šeba: *Bound states in curved quantum waveguides*, J. Math. Phys. **30**, 2574 (1989).
- [11] P. Exner and P. Šeba: *Trapping modes in a curved electromagnetic waveguide with perfectly conducting walls*, Phys. Lett. A **144**, 347 (1990).
- [12] J. Goldstone and R. L. Jaffe: *Bound states in twisting tubes*, Phys. Rev. B **45**, 14100 (1992).
- [13] J. P. Carini, J. T. Londergan, K. Mullen and D. P. Murdock: *Bound states and resonances in waveguides and quantum wires*, Phys. Rev. B **46**, 15538 (1992).
- [14] J. P. Carini, J. T. Londergan, K. Mullen and D. P. Murdock: *Multiple bound states in sharply bent waveguides*, Phys. Rev. B **48**, 4503 (1993).
- [15] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999).
- [16] B. Dietz: *numerical computation*, private Mitteilung (unveröffentlicht).
- [17] E. Sadurni and W. P. Schleich: *Conformal Mapping and Bound States in Bent Waveguides*, AIP Conf. Proc. **1323**, 283 (2010).

-
- [18] R. Blumel, B. Dietz, C. Jung and U. Smilansky: *On the transition to chaotic scattering*, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 1483 (1992).
- [19] H. Alt, P. von Brentano, H. D. Gräf, R. Hofferbert, M. Philipp, H. Rehfeld, A. Richter and P. Schardt: *Precision test of the Breit-Wigner formula on resonances in a superconducting microwave cavity*, Phys. Lett. B **366**, 7 (1996).
- [20] F. Beck, C. Dembowski, A. Heine and A. Richter: *R-matrix theory of driven electromagnetic cavities*, Phys. Rev. E **67**, 066208 (2003).
- [21] L. C. Maier and J. C. Slater: *Field Strength Measurements in Resonant Cavities*, J. Appl. Phys. **23**, 68 (1952).
- [22] L. C. Maier and J. C. Slater: *Determination of Field Strength in a Linear Accelerator Cavity*, J. Appl. Phys. **23**, 78 (1952).
- [23] E. Bogomolny, B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer and C. Schmit: *First Experimental Observation of Superscars in a Pseudointegrable Barrier Billiard*, Phys. Rev. Lett. **97**, 254102 (2006).
- [24] M. Miski-Oglu: *Superscars und Statistik der Knotengebiete in einem symmetrischen Barrierebilliard*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 2007.

Danksagung

Ich danke Professor em. Dr. Dr. h.c. mult Achim Richter, dass er dieses interessante Thema zur Verfügung gestellt hat und mir im Rahmen meiner Bachelorarbeit ermöglicht hat, dies zu bearbeiten. Ich danke meinen Betreuern Dr. Babara Dietz, Dr. Stefan Bittner und Dr. Maksim Miski-Oglu, dass sie mir immer mit Rat und Tat zu Seite standen und mir das nötige Vertrauen und den Zuspruch gegeben haben, um diese Arbeit zu beenden. An dieser Stelle sei noch einmal besonders Dr. Stefan Bittner gedankt, den ich des öfteren besonders viele Nerven und Zeit gekostet habe. Ich danke Jochen Isensee und Tobias Klaus für die anregenden und hilfreichen Diskussionen und Jochen für die Gesellschaft, wenn es dann doch mal 3 Uhr früh im Institut wurde.

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 12. September 2011

(Christopher Ripp)
