

---

# Experimenteller Test einer Spurformel für chaotische dielektrische Resonatoren

---

Experimental test of a trace formula for chaotic dielectric resonators

Bachelor-Thesis von Jochen Isensee

Juli 2011



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Physik  
Institut für Kernphysik  
AG Quantenchaos



Gefördert durch die DFG im Rahmen des SFB 634.

---

Experimenteller Test einer Spurformel für chaotische dielektrische Resonatoren  
Experimental test of a trace formula for chaotic dielectric resonators

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Jochen Isensee

1. Gutachten: Professor em. Dr. Dr. h.c. mult. Achim Richter
2. Gutachten: Dr. Barbara Dietz

Tag der Einreichung:

---

## Zusammenfassung

---

Das Ziel dieser Arbeit war ein experimenteller Test der von Bogomolny *et al.* [Phys. Rev. E **78**, 056202 (2008)] vorgeschlagenen Spurformel für dielektrische Resonatoren mit klassisch chaotischer Dynamik. Aufgrund von möglichen Anwendungen als Mikrolaser und in der integrierten Optik haben dielektrische Resonatoren in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erhalten. Von besonderem Interesse ist der Zusammenhang zwischen Wellen- und Strahldynamik, das heißt zwischen einem wellendynamischen und seinem korrespondierenden klassischen System. Ein solcher Zusammenhang wird durch sogenannte Spurformeln beschrieben.

Die hier untersuchte Spurformel verknüpft die Resonanzdichte eines zweidimensionalen dielektrischen Resonators mit den periodischen Bahnen des korrespondierenden klassischen Billards. Um sie experimentell zu testen, wurden Experimente mit zwei dielektrischen Mikrowellenresonatoren von der Form eines chaotischen Stadions durchgeführt. Für beide Resonatoren wurde das Frequenzspektrum gemessen. Etwa 5% der durch die Weyl-Formel gegebenen Gesamtzahl von Resonanzen konnten extrahiert werden. Das aus den gemessenen Resonanzen berechnete Längenspektrum zeigt, wie das aus der Spurformel bestimmte semiklassische Längenspektrum, Maxima bei den Längen der klassischen periodischen Bahnen. Allerdings betragen die Amplituden von ersterem aufgrund der fehlenden Resonanzen nur etwa 25% derjenigen von letzterem.

Auch ein Vergleich des semiklassischen Längenspektrums mit numerischen Rechnungen ergab qualitativ gute Übereinstimmung, wenngleich die semiklassisch vorhergesagten Amplituden zu groß sind.

---

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Experimenteller Aufbau . . . . .	5
2.2	Messung von Frequenzspektren . . . . .	6
2.3	Theoretische Beschreibung von Resonatoren . . . . .	7
2.3.1	Resonanzen im Frequenzspektrum . . . . .	7
2.4	Weyl-Formel und Zustandsdichte . . . . .	8
2.5	Spurformel . . . . .	9
2.6	Längenspektrum . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Messung und Auswertung</b>	<b>13</b>
3.1	Gemessene Frequenzspektren . . . . .	13
3.1.1	Resonanzen . . . . .	14
3.1.2	Bestimmung des Brechungsindex . . . . .	15
3.1.3	Mittlerer Resonanzabstand und charakteristische Länge . . . . .	15
3.2	Berechnung der Spurformel . . . . .	17
3.2.1	Berechnung der periodischen Bahnen im Stadionbillard . . . . .	17
3.2.2	Symmetrie und Umlaufsinn . . . . .	19
3.3	Vergleich der Spurformel mit dem experimentellen Längenspektrum . . . . .	20
3.4	Vergleich der Spurformel mit einer numerischen Rechnung . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>26</b>

---

## 1 Einleitung

---

In der klassischen Mechanik ist die Zeitentwicklung eines Systems durch die Newton'schen Bewegungsgleichungen und die Anfangsbedingungen bestimmt. Einige Systeme weisen jedoch eine sehr empfindliche Abhängigkeit der Trajektorien von den Anfangsbedingungen auf. Für ein solches System entfernen sich zwei Trajektorien bei kleinen Unterschieden der Anfangsbedingungen im Phasenraum mit der Zeit exponentiell voneinander. Derartige Systeme werden als chaotisch bezeichnet, im Gegensatz zu regulären Systemen, deren Trajektorien sich bei leicht unterschiedlichen Anfangsbedingungen höchstens linear voneinander entfernen. Da die Anfangsbedingungen nicht vollständig bekannt sind, ist die Entwicklung eines chaotischen Systems nicht über große Zeitspannen vorhersagbar, obwohl diese im Prinzip vorher bestimmt ist. Man spricht deshalb auch von "deterministischem Chaos" [1]. Einfache Modelle zur Untersuchung von Eigenschaften der klassischen Dynamik und der korrespondierenden Quantendynamik liefern Billards. Ein Billard ist ein beliebig geformter zweidimensionaler Bereich, in dem sich ein punktförmiges Teilchen bis auf elastische Stöße mit den Wänden frei bewegt. Je nach Wahl der Form der Berandung kann die Bewegung des Teilchens regulär, chaotisch oder gemischt sein. Beispiele regulärer Billards sind das Kreis- und das Quadratbillard. Das Stadionbillard ist hingegen ein Beispiel für ein vollständig chaotisches System, wie in [2] gezeigt wurde.

In der Quantenmechanik ist der Begriff des Chaos nicht anwendbar, da man aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation nicht mehr von Bahnen sprechen kann. Daher wurden andere Methoden entwickelt, um die Manifestation von klassischem Chaos in korrespondierenden quantenmechanischen Systemen zu charakterisieren. Dies ist Gegenstand des Forschungsgebiets des sogenannten Quantenchaos. Ein wichtiges Teilgebiet des Quantenchaos ist die Zufallsmatrixtheorie (Random Matrix Theory, RMT). Diese besagt unter anderem, dass die Fluktuations-eigenschaften der Energieeigenwerte eines Quantensystems mit klassisch chaotischer Dynamik mit denen der Eigenwerte bestimmter Zufallsmatrixensembles übereinstimmen (die sogenannte Bohigas-Giannoni-Schmit-Vermutung [3]).

Neben der RMT ist die 1970 von Gutzwiller begründete Theorie periodischer Bahnen (Periodic Orbit Theory, POT) ein weiteres wichtiges Teilgebiet des Quantenchaos. Diese liefert einen semi-klassischen Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte eines quantenmechanischen Systems und den periodischen Bahnen des korrespondierenden klassischen Systems über sogenannte Spurformeln. Spurformeln wurden 1970/71 von Gutzwiller sowohl für reguläre [4] als auch für chaotische Systeme [5] hergeleitet. Tatsächlich lassen sich Spurformeln nicht nur auf Quantensysteme wie Kerne [6] oder Atome [7], sondern allgemein auf wellendynamische Systeme wie z.B. akustische [8, 9] oder elektromagnetische [10, 11] Resonatoren anwenden. Kürzlich wurde eine Spurformel für zweidimensionale dielektrische Resonatoren vorgeschlagen [12].

Dielektrische Resonatoren haben in den letzten Jahrzehnten aufgrund ihrer potentiellen Anwendungen als Mikrolaser [13], in der Telekommunikation, der integrierten Optik oder als Sensoren [14, 15] an Bedeutung gewonnen [16]. Von besonderem Interesse ist dabei der Zusammenhang zwischen der klassischen Strahldynamik und der Wellendynamik dieser Resonatoren, z.B. im Zusammenhang mit ihren Emissionseigenschaften [17, 18]. Die in [12] vorgeschlagene Spurformel stellt einen Zusammenhang zwischen der Strahldynamik und den spektralen Eigenschaften von dielektrischen Resonatoren her. Sie wurde in [19] erfolgreich für reguläre dielektrische Mikrowellenresonatoren experimentell getestet. Ziel dieser Arbeit ist ein Test der Spurformel für chaotische dielektrische Resonatoren mit zwei dielektrischen Mikrowellenresonatoren von der Form eines Stadions. Dielektrische Stadionresonatoren wurden bereits

---

vielfach als Mikrolaser verwendet [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Auch erste Untersuchungen des dielektrischen Stadions im Hinblick auf die Spurformel wurden in [27] veröffentlicht, aber ein detaillierter experimenteller Test der Spurformel steht noch aus.

Die Grundlagen des Experiments, ein kurzer Abriss der theoretischen Beschreibung von dielektrischen Resonatoren und die Spurformel werden in Kapitel 2 dieser Arbeit vorgestellt. Die Analyse der gemessenen Frequenzspektren, die Berechnung der Spurformel und schließlich der Vergleich des experimentell bestimmten Längenspektrums mit der Spurformel wird in Kapitel 3 präsentiert. Kapitel 4 beendet diese Arbeit mit einer Zusammenfassung und abschließenden Bemerkungen.

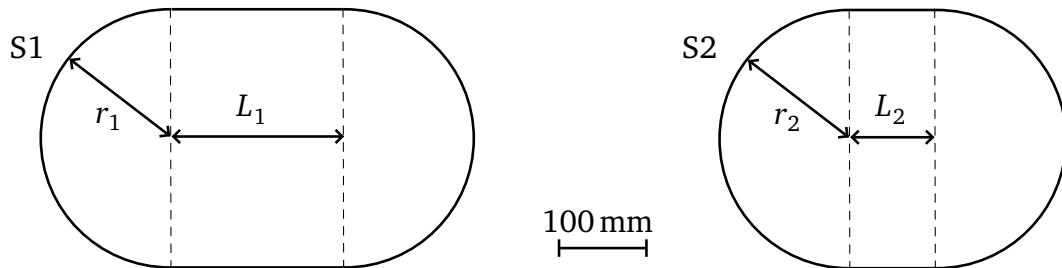
---

## 2 Grundlagen

---

### 2.1 Experimenteller Aufbau

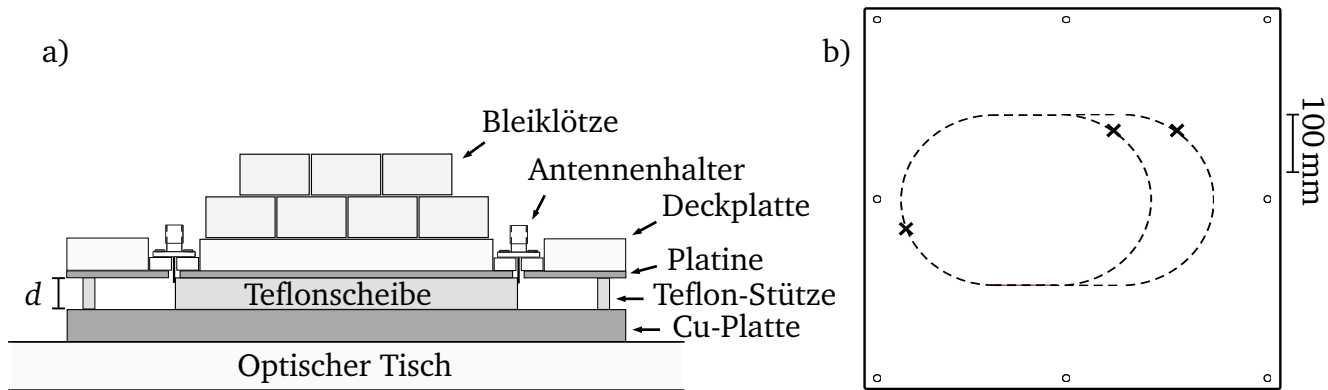
---



**Abbildung 1:** Skizze der beiden Stadien S1 und S2 mit den Radien der Halbkreise  $r_1 = 150,1$  mm,  $r_2 = 149,9$  mm und den Seitenlängen  $L_1 = 200,2$  mm und  $L_2 = 99,8$  mm.

Untersucht wurden zwei flache dielektrische Mikrowellenresonatoren aus Teflon in Form eines Stadions. Ein Stadion setzt sich aus einem Rechteck und zwei Halbkreisen an zwei gegenüberliegenden Seiten zusammen. Abbildung 1 zeigt eine Skizze der beiden untersuchten Teflonscheiben. Die Länge des rechteckigen Teils des ersten Stadions (im folgenden S1 genannt) ist  $L_1 = 200,2$  mm, die des zweiten (im folgenden S2 genannt)  $L_2 = 99,8$  mm. Die Halbkreise haben für S1 den Radius  $r_1 = 150,1$  mm und für S2 den Radius  $r_2 = 149,9$  mm. Beide Teflonscheiben haben eine Dicke von  $d = 5$  mm und einen Brechungsindex von  $n \approx 1,4$ . Der Formfaktor  $\epsilon_i = L_i/(2r_i)$  charakterisiert unabhängig von der Größe des Stadions die Eigenschaften der klassischen Dynamik. Für Stadion S1 ist er  $\epsilon_1 \approx 2/3$ , für S2 ist er  $\epsilon_2 \approx 1/3$ .

Um einen zweidimensionalen Resonator zu realisieren, wurden die Teflonscheiben jeweils zwischen zwei Metallplatten gelegt. Dann sind die Resonatoren unterhalb der Grenzfrequenz  $f_g = c/(2nd)$  quasi-zweidimensional [28, 29]. Hier ist  $f_g \geq 20$  GHz. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 2a) von der Seite und in Abb. 2b) von oben schematisch skizziert. Das Experiment wurde auf einem optischen Tisch durchgeführt. Auf diesen wurde eine Kupferplatte gelegt, auf diese die Teflonscheibe und darauf eine etwa 0,5 mm dicke, verkupferte Platine. Acht Teflonstützen an den Rändern der Kupferplatte verhindern, dass sie dort absinkt. Auf der Platine befinden sich aufgelötete Antennenports, an denen die Antennenhalter festgeschraubt sind. Die Antennen an den Antennenhaltern bestehen aus einem dünnen Draht, der sich an die Seitenwand der Teflonscheibe anschmiegt. An die Antennenhalter werden zum Ein- und Auskoppeln von Mikrowellen HF-Kabel geschraubt. In Abb. 2b) ist eine Draufsicht auf den Aufbau schematisch dargestellt. Die Positionen der verwendeten Antennen sind mit Kreuzen markiert. In [30] wurde festgestellt, dass bereits ein kleiner Luftspalt zwischen der dielektrischen Scheibe und der Metallplatte dazu führen kann, dass das System wegen des fehlenden Kontakts zwischen beiden nicht mehr exakt zweidimensional ist. Deshalb wurde zur Minimierung des Luftspalts der optische Tisch verwendet. Dieser verhindert, dass sich die Kupferplatte verbiegt. Außerdem wurde eine mit Bleiklötzen beschwerte Deckplatte aufgelegt, um einen möglichst guten Kontakt zwischen Kupferplatte und Teflonscheibe zu gewährleisten. Dieses System kann in guter Näherung als zweidimensional betrachtet werden (siehe [19]).

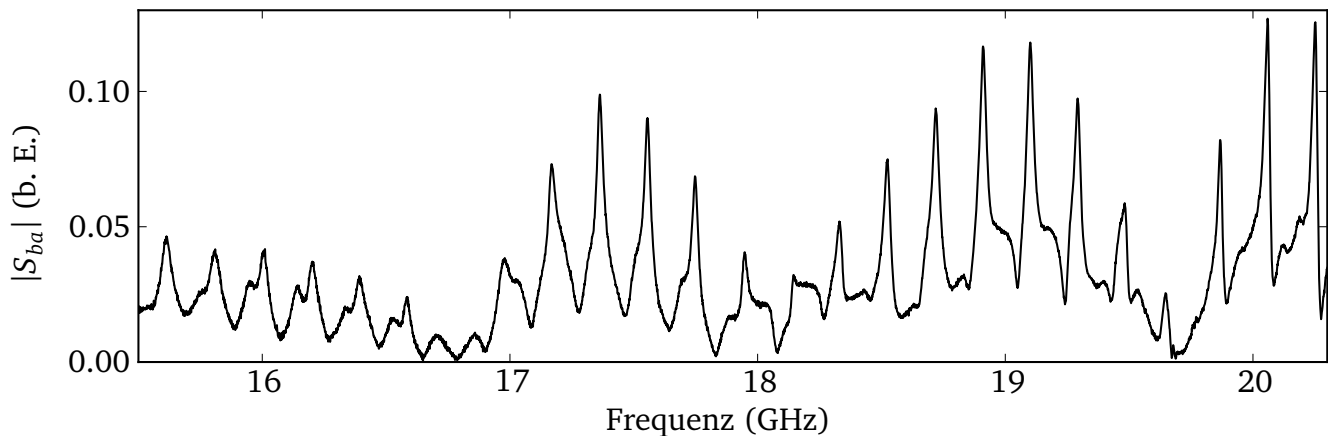


**Abbildung 2:** a) Schematischer Schnitt durch den Versuchsaufbau (nicht maßstabsgetreu). Das Experiment ist auf einem optischen Tisch aufgebaut. Mit der Teflonscheibe zwischen zwei Metallplatten wird ein 2D-Resonator realisiert. Die Antennen ragen von den Antennenhaltern bis an die Seiten der Teflonscheibe, um Mikrowellen in den Resonator ein- und auszukoppeln. b) Schematische Sicht auf den Versuchsaufbau. Unter der Platine liegen die Teflonscheiben (gestrichelte Linien). Die Positionen der Antennen sind durch Kreuze markiert. Die Teflonstützen an den Rändern unter der Platine sind durch kleine Kreise markiert. Sie verhindern dort das Absinken der Platine.

## 2.2 Messung von Frequenzspektren

Zur Messung von Frequenzspektren wurden die beiden Ports eines Vektor-Netzwerk-Analysators (VNA) des Typs N5230A von Agilent Technologies über HF-Kabel an die Antennenhalter des Resonators angeschlossen. Die gemessene Größe ist das sogenannte Streumatrixelement  $S_{ba}(f)$ . Sein Betragsquadrat entspricht dem Verhältnis der an Antenne  $b$  ausgekoppelten Leistung  $P_b$  zu der an Antenne  $a$  eingekoppelten Leistung  $P_a$ ,

$$|S_{ba}(f)|^2 = \frac{P_b}{P_a} \quad (1)$$



**Abbildung 3:** Ein Ausschnitt eines gemessenen Frequenzspektrums für das Stadion S2.



bei einer Frequenz  $f$ . Der VNA misst außerdem die relative Phase zwischen ein- und ausgekoppeltem Signal und damit das komplexe Streumatrixelement  $S_{ba}(f)$ . Das Frequenzspektrum erhält man durch auftragen von  $|S_{ba}(f)|$  über der Frequenz  $f$ . Ein Ausschnitt eines gemessenen Frequenzspektrums für das Stadion S2 ist in Abb. 3 zu sehen. Bei den Resonanzfrequenzen des Resonators lassen sich Maxima im Frequenzspektrum erkennen.

### 2.3 Theoretische Beschreibung von Resonatoren

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  und das magnetische Feld  $\vec{B}$  im Resonator wird durch die Lösungen der Maxwell-Gleichungen mit den Randbedingungen des Resonators beschrieben. Bei Abwesenheit von freien Strömen und Ladungen lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen die vektorielle Helmholtz-Gleichung [31]

$$(\Delta + n^2k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2)$$

mit dem Brechungsindex  $n$  und der Wellenzahl  $k = \omega/c$  ableiten. Dabei ist  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Für flache zylindrische Resonatoren der Dicke  $d$  existieren unterhalb der Grenzfrequenz  $f_g = c/(2nd)$  nur transversal magnetische Moden mit in  $z$ -Richtung homogenem elektrischen Feld (sogenannte  $TM_0$ -Moden) [28, 29, 32]. Hier erfüllt  $E_z$  die skalare Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + n^2k^2) E_z = 0 \quad (3)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} \Big|_{\partial S} &= E_z^{(2)} \Big|_{\partial S} \\ \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial n} \Big|_{\partial S} &= \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\partial S}. \end{aligned} \quad (4)$$

Der flache dielektrische Resonator liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene,  $\partial S$  bezeichnet die Grenzfläche zwischen dem Resonator (Medium 1) und der Luft (Medium 2), und  $\vec{n}$  ist der nach außen zeigende Normalenvektor auf  $\partial S$ .

#### 2.3.1 Resonanzen im Frequenzspektrum

Die Resonanzen des Resonators entsprechen den Eigenwerten  $k_j$  der Helmholtz-Gleichung (2). Bei einem offenen Resonator wird ein Teil der gespeicherten Energie nach aussen abgestrahlt, so dass die Eigenwerte komplex sind [18]. Es gibt dann keine gebundenen Zustände, sondern nur sogenannte quasigebundene Zustände. Die Resonanzfrequenz  $f_j$  ergibt sich aus dem Realteil des Eigenwerts

$$f_j = \frac{c}{2\pi} \text{Re}(k_j). \quad (5)$$

Die Resonanzbreite aufgrund der Strahlungsverluste  $\Gamma_j^{\text{rad}}$  ist

$$\Gamma_j^{\text{rad}} = -2 \frac{c}{2\pi} \text{Im}(k_j). \quad (6)$$

Die Resonanzfrequenzen können experimentell aus dem mit einem VNA gemessenen Frequenzspektrum bestimmt werden. Das Streumatrixelement hat in der Nähe einer isolierten Resonanz  $j$  die Form [33, 34]

$$S_{ba}(f) = \delta_{ba} - i \frac{\sqrt{\Gamma_j^a \Gamma_j^b}}{f - f_j + i \frac{\Gamma_j}{2}}. \quad (7)$$

Hier bezeichnen  $\Gamma_j^a, \Gamma_j^b$  die sogenannten Partialbreiten der Antennen  $a$  und  $b$  und  $\Gamma_j$  die Halbwertsbreite. Die Partialbreiten sind proportional zu der durch die entsprechende Antenne ausgekoppelten Leistung. Bei den verwendeten Dipolantennen gilt  $\Gamma_j^{a,b} \propto |E_z(\vec{r}_{a,b})|^2$ , wobei  $\vec{r}_{a,b}$  die Positionen der Antennen bezeichnen. Die Antennen regen also eine Eigenmode nur gut an bzw. können nur Leistung auskoppeln, wenn das Feld der Mode an den Positionen der Antennen nicht verschwindet.

Die Halbwertsbreite ergibt sich aus der Summe aller Verlustmechanismen, nämlich der von den Antennen ausgekoppelten Leistung ( $\Gamma_j^{a,b}$ ), den Ohm'schen Verlusten in der Boden- und Deckplatte ( $\Gamma_j^\Omega$ ), der Abstrahlung nach aussen ( $\Gamma_j^{\text{rad}}$ ) und der Absorption im Material des Resonators ( $\Gamma_j^{\text{abs}}$ ) zu

$$\Gamma_j = \Gamma_j^a + \Gamma_j^b + \Gamma_j^\Omega + \Gamma_j^{\text{rad}} + \Gamma_j^{\text{abs}}. \quad (8)$$

Als Güte  $Q_j$  einer Resonanz bezeichnet man das Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Halbwertsbreite,

$$Q_j = \frac{f_j}{\Gamma_j}. \quad (9)$$

Eine kleine Güte bedeutet, dass die zugehörige Mode hohe Verluste hat, z.B. weil sie stark abstrahlt. Die Resonanzen solcher Moden sind teilweise so breit und haben so geringe Amplituden, dass man sie im Spektrum nicht mehr erkennen kann. Insbesondere für Resonatoren, deren Berandung eine nicht konstante Krümmung besitzt, wie dem dielektrischen Stadion, ist die Abstrahlung oft besonders stark.

## 2.4 Weyl-Formel und Zustandsdichte

Die Gesamtzahl der Resonanzen  $N(k)$  bis zu einer Wellenzahl  $k = 2\pi f/c$  kann man in einen glatten Anteil  $\bar{N}(k)$  und einen fluktuierenden Teil  $N^{\text{fluk}}(k)$  aufteilen,

$$N(k) = \bar{N}(k) + N^{\text{fluk}}(k). \quad (10)$$

Der glatte Anteil wird für einen offenen zweidimensionalen dielektrischen Resonator durch die Weyl-Formel [12]

$$\bar{N}(k) = \frac{An^2}{4\pi} k^2 + \tilde{r}(n) \frac{U}{4\pi} k + O(1) \quad (11)$$

beschrieben. Hierbei ist  $n$  der Brechungsindex,  $A$  die Fläche und  $U$  der Umfang des zweidimensionalen Resonators. Der Faktor  $\tilde{r}(n)$  hängt von den Randbedingungen an der Grenzfläche zwischen dem dielektrischen Resonator und der umgebenden Luft ab. Er beträgt hier  $\tilde{r}(n_{\text{Teflon}}) \approx 1,02$  und ist durch [12]

$$\tilde{r}(n) = 1 + \frac{n^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} \tilde{R}(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} \tilde{R}(t) \quad (12)$$

gegeben. Für TM-Moden ist

$$\tilde{R}(t) = \frac{\sqrt{t^2 + n^2} - \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + n^2} + \sqrt{t^2 + 1}}. \quad (13)$$

Die Resonanzdichte

$$\rho(k) = -\frac{1}{\pi} \sum_j \frac{\text{Im}(k_j)}{[k - \text{Re}(k_j)]^2 + [\text{Im}(k_j)]^2} \quad (14)$$

lässt sich analog in

$$\rho = \bar{\rho} + \rho^{\text{fluk}} \quad (15)$$

aufteilen [12]. Dabei ist  $\bar{\rho}$  der sogenannte Weyl-Term und ergibt sich aus der Ableitung der Weyl-Formel (11) nach  $k$ . Während der Weyl-Term nur von der Fläche, dem Umfang und dem Brechungsindex des Resonators abhängt, kann der fluktuierende Anteil  $\rho^{\text{fluk}}$  durch die periodischen Bahnen des entsprechenden klassischen Systems ausgedrückt werden. Dabei bezeichnet man eine Bahn im Phasenraum als periodische Bahn, wenn sie nach einer endlichen Zeit wieder zum Anfangspunkt im Phasenraum zurückkehrt und sich dann wiederholt.

## 2.5 Spurformel

Eine Spurformel stellt einen Zusammenhang zwischen dem fluktuierenden Teil der Zustandsdichte eines quanten- oder wellendynamischen Systems und den periodischen Bahnen des korrespondierenden klassischen Systems her. Dies wurde 1970/71 von Gutzwiller sowohl für reguläre [4] als auch für chaotische Systeme [5] hergeleitet. Für zweidimensionale dielektrische Resonatoren wurde von Bogomolny *et al.* eine entsprechende Spurformel für reguläre und chaotische Systeme vorgeschlagen [12]. Im Wesentlichen ist die Spurformel eine Summe über alle primitiven periodischen Bahnen sowie deren mehrfache Umläufe,

$$\rho_{\text{skl}}^{\text{fluk}}(k) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{p,r}^{\text{fluk}}(k) + \text{c.c.} \quad (16)$$

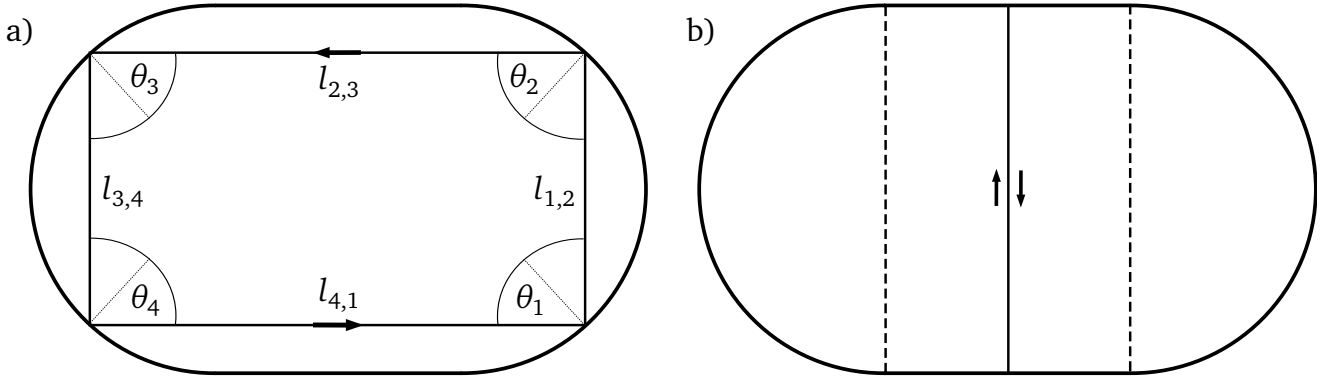
Der  $r$ -fache Umlauf der primitiven periodischen Bahn  $p$  liefert den Beitrag

$$\rho_{p,r}^{\text{fluk}}(k) = \frac{nl_p}{\pi |\det(\mathbf{M}_p^r - 1)|^{1/2}} R_p^r e^{i[nkr l_p - r\mu_p \pi/2]}, \quad (17)$$

wobei  $n$  den Brechungsindex und  $l_p$  die Länge der primitiven periodischen Bahn bezeichnet. Der Fresnelfaktor  $R_p$ , die Monodromiematrix  $\mathbf{M}_p$  und der Maslov-Index  $\mu_p$  werden in den folgenden Absätzen erklärt.

Der Fresnelfaktor  $R_p$  ist durch das Produkt der Fresnelkoeffizienten für die  $N$  Reflexionen  $j$  an der Grenzfläche des Resonators (Übergang von Dielektrikum mit Brechungsindex  $n$  zu Luft mit Brechungsindex 1) gegeben [12], also

$$R_p = \prod_{j=1}^N R(\theta_j) \quad \text{mit} \quad R(\theta_j) = \begin{cases} \frac{n \cos \theta_j - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_j}}{n \cos \theta_j + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_j}} & \text{für } |\theta_j| \leq \theta_{\text{krit}}(n) \\ \frac{n \cos \theta_j - i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_j - 1}}{n \cos \theta_j + i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_j - 1}} & \text{für } |\theta_j| > \theta_{\text{krit}}(n). \end{cases} \quad (18)$$



**Abbildung 4:** a) Stadionresonator mit Rechteckbahn. Die Reflexionswinkel werden zum Lot an die Berandung des Resonators gemessen. Die Rechteckbahn hat vier Reflexionen an der Grenzfläche mit den Reflexionswinkeln  $\theta_j = 45^\circ$ . Die Strecken  $l_{j-1,j}$  verbinden die Reflexionspunkte. Sie sind wichtig für die Bestimmung der Monodromiematrix. b) Ein „Bouncing-Ball-Orbit“ ist gezeigt. Diese gibt es auf der gesamten Fläche zwischen den geraden Teilen des Stadions (also zwischen den gestrichelten Linien). Es gibt also eine ganze Familie dieser Bahnen.

Dabei ist  $\theta_j$  der Reflexionswinkel wie in Abb. 4a) gezeigt und  $\theta_{\text{krit}}(n) = \arcsin(1/n)$  der kritische Winkel für innere Totalreflexion. Der Fresnelkoeffizient beschreibt die relative Amplitude eines reflektierten Strahls (siehe Glg. (17)) und eventuell auftretende Phasensprünge. Für  $\theta_j < \theta_{\text{krit}}$  und TM-Polarisation ist  $R(\theta_j)$  rein reell mit  $|R(\theta_j)| < 1$ . Es findet eine partielle Reflexion ohne Phasensprung statt, bei der ein Teil des Strahls nach außen gebrochen wird. Für  $\theta_j \geq \theta_{\text{krit}}$  ist  $R(\theta_j)$  eine komplexe Zahl mit  $|R(\theta_j)| = 1$ . Es findet also eine innere Totalreflexion statt. Dabei kommt es zu einem Phasensprung. Für Teflon ist  $\theta_{\text{krit}}(n_{\text{Teflon}}) \approx 45^\circ$ ; die Rechteckbahn aus Abb. 4a) liegt mit ihren Reflexionswinkeln  $\theta_j = 45^\circ$  also an der Grenze der inneren Totalreflexion.

Die Monodromiematrix  $\mathbf{M}_p$  bildet eine kleine Störung  $(\Delta s, \Delta \theta)$  der Anfangsbedingungen auf diejenige  $(\Delta s', \Delta \theta')$  nach einem Umlauf ab [35],

$$\begin{pmatrix} \Delta s' \\ \Delta \theta' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_p \begin{pmatrix} \Delta s \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathbf{M}_p) = 1. \quad (19)$$

Die Monodromiematrix einer periodischen Bahn enthält damit Informationen über die Stabilität der Bahn [36]. Für stabile Bahnen ist  $|\text{Tr}(\mathbf{M}_p)| < 2$ , die Eigenwerte der Monodromiematrix sind komplex und die gestörte Bahn wird zurück auf die ursprüngliche Bahn fokussiert. Eine Bahn mit  $|\text{Tr}(\mathbf{M}_p)| = 2$  ist marginal stabil, die Eigenwerte betragen beide  $\pm 1$ , und eine kleine Störung der Bahn pflanzt sich linear fort. Für instabile Bahnen gilt  $|\text{Tr}(\mathbf{M}_p)| > 2$ , die Eigenwerte der Monodromiematrix sind reell, und kleine Störungen führen zu einem exponentiellem Divergieren weg von der ursprünglichen Bahn. Es ist bekannt, dass im Stadion alle periodischen Bahnen bis auf eine Ausnahme, die Familie des Bouncing-Ball-Orbits, die in Abb. 4b) gezeigt ist, instabil sind [2]. Die Mitglieder dieser Familie sind mit  $|\text{Tr}(\mathbf{M}_{\text{BB}})| = 2$  marginal stabil.

Die Monodromiematrix lässt sich als Produkt von  $2N$  Abbildungsmatrizen schreiben. Dabei wird die Propagation entlang der periodischen Bahn gemäß der geometrischen Matrizenoptik

linearisiert. Es steht immer eine Abbildungsmatrix für eine Translation ( $\mathbf{m}_j^T$ ) gefolgt von einer für eine Reflexion ( $\mathbf{m}_j^R$ ) im Produkt [36]

$$\mathbf{M}_p = \prod_{j=1}^N \mathbf{m}_j^T \mathbf{m}_j^R, \quad (20)$$

mit

$$\mathbf{m}_j^T = \begin{pmatrix} 1 & l_{j-1,j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_j^R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{r_j \cos(\theta_j)} & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Dabei ist  $r_j$  der Krümmungsradius der Berandung an der  $j$ -ten Reflexion mit  $r_j = r$  bzw.  $r_j = \infty$  für eine Reflexion an einem Halbkreis bzw. an einer Geraden. Die Länge  $l_{j-1,j}$  ist die Strecke zwischen der  $j-1$ -ten und der  $j$ -ten Reflexion wie in Abb. 4a) gezeigt; es gilt  $l_{0,1} = l_{N,1}$  für eine geschlossene Bahn.

Der Maslov-Index  $\mu_p$  einer periodischen Bahn entspricht der Anzahl der konjugierten Punkte entlang der Bahn. Dies sind Punkte, in denen sich zwei Trajektorien, die mit einer kleinen Winkeldifferenz gestartet sind, überkreuzen, z.B. an einer Kaustik. In [37] wurde gezeigt, dass die Anzahl der konjugierten Punkte einer Bahn im Stadionbillard mit der Anzahl der Reflexionen an den halbkreisförmigen Teilen der Berandung des Billards übereinstimmt. Der Maslov-Index für die Rechteckbahn in Abb. 4a) ist z.B.  $\mu_p = 4$ .

## 2.6 Längenspektrum

Das Längenspektrum bietet eine Möglichkeit, die Spurformel aussagekräftig mit den experimentellen Daten zu vergleichen. Aus den gemessenen Resonanzen erhält man über die Fouriertransformation des fluktuierenden Teils der Zustandsdichte aus Glg. (15) die Größe [12]

$$\tilde{\rho}(l) = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk [\rho(k) - \bar{\rho}(k)] e^{-iknl} = \sum_j e^{-ik_j nl} - \text{FT}\{\bar{\rho}\}. \quad (22)$$

Das Längenspektrum ergibt sich aus der Auftragung von  $|\tilde{\rho}(l)|$  über der Länge  $l$ . Die Summation in Glg. (22) geht über alle Resonanzen  $j$  mit  $k_{\min} \leq \text{Re}(k_j) \leq k_{\max}$ . Dabei werden die Wellenzahlen  $k_{\min}$  und  $k_{\max}$  aus der unteren bzw. oberen Grenze des betrachteten Frequenzbereichs bestimmt.

Die Fouriertransformation der Spurformel in Glg. (16) liefert das semiklassische Längenspektrum

$$|\tilde{\rho}_{\text{skl}}(l)| = \left| \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} a_{r,p} \text{sinc} \left( \frac{nk'}{2} (rl_p - l) \right) \right|, \quad (23)$$

mit  $k' = k_{\max} - k_{\min}$  und den komplexen Amplituden

$$a_{r,p} = k' \frac{nl_p}{\pi |\det(\mathbf{M}_p^r - 1)|^{1/2}} \mathbf{R}_p^r e^{i[n\bar{k}r l_p - r\mu_p \pi/2]}. \quad (24)$$

---

Dabei ist  $\bar{k} = (k_{\max} + k_{\min})/2$  und  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Der Beitrag des  $r$ -ten Umlaufs einer Bahn  $p$  liefert eine Sinc-Kurve mit Hauptmaximum bei  $l = r l_p$ . Die Linienform bzw. Breite der Sinc-Kurve wird von dem Brechungsindex  $n$  und dem Messbereich  $[k_{\min}, k_{\max}]$  bestimmt und ist für alle Bahnen gleich. Die Amplitude und die Phase sind durch die in Glg. (17) genannten Beiträge zuzüglich eines Faktors  $k'$  gegeben. Die Amplituden sind für totalreflektierte Bahnen, die nur geringfügig instabil sind, am größten. Bei der Länge solch einer Bahn wird ein Peak im Längenspektrum erwartet. Allerdings kann es zur Überlappung und Interferenz mit den Beiträgen anderer periodischer Bahnen kommen.

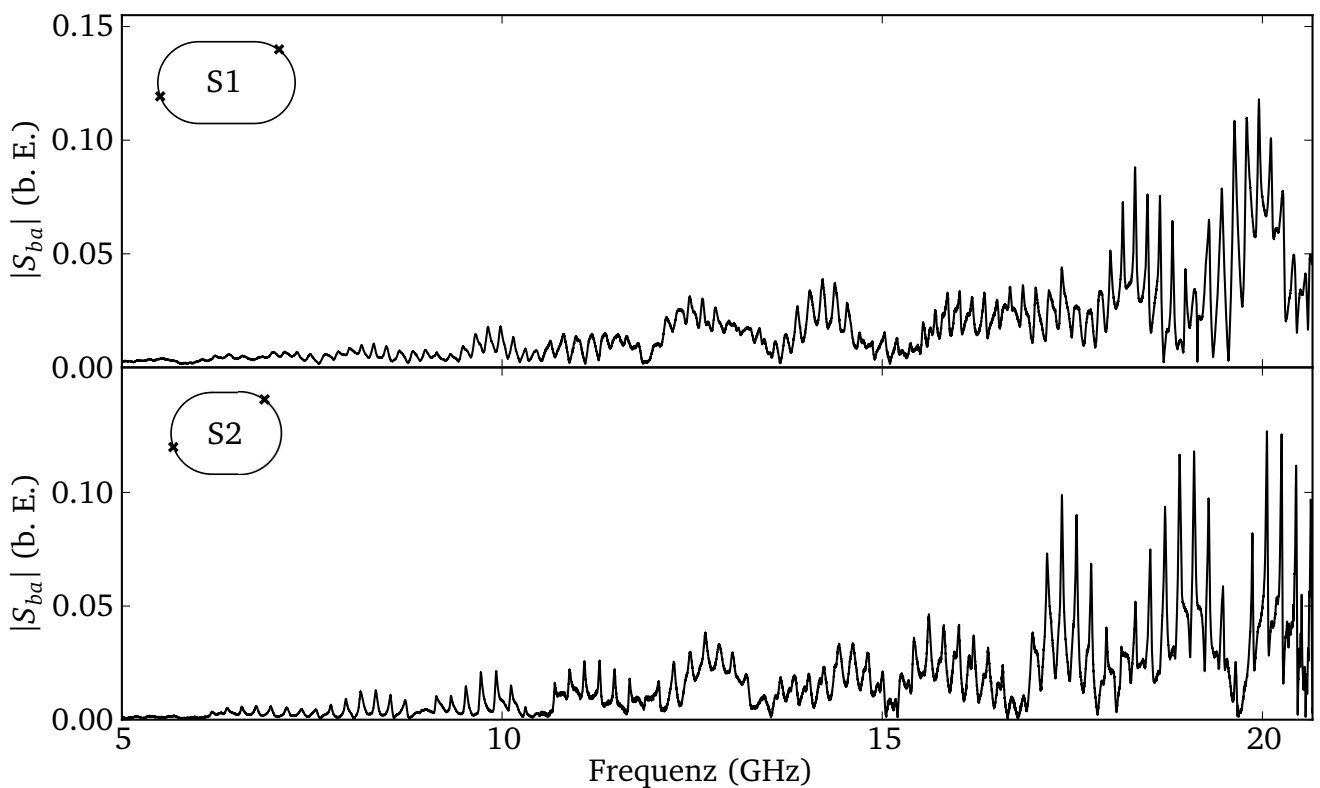
Details zur Berechnung der periodischen Bahnen und ein Vergleich des experimentellen Längenspektrums mit dem semiklassischen werden im weiteren Verlauf der Arbeit diskutiert und gezeigt.

### 3 Messung und Auswertung

#### 3.1 Gemessene Frequenzspektren

Die Frequenzspektren wurden mit einem VNA gemessen (siehe Abschnitt 2.2). Vor der Messung wurde der VNA mit den angeschlossenen HF-Kabeln kalibriert. Dazu wurde ein elektronisches, vollautomatisches Kalibrierungsgerät von Agilent Technologies verwendet. Dies war notwendig, um den Einfluss von Dämpfung und Reflexionen in den Kabeln auf das Frequenzspektrum zu entfernen. Die gemessenen Spektren sind für die beiden Stadien in Abb. 5 zu sehen. Beim Betrachten der Spektren fällt zunächst auf, dass es eine Gruppe von äquidistanten Resonanzen gibt. Diese Resonanzen stechen klar aus dem Spektrum heraus und scheinen höhere Güten zu haben. Sie werden in Abschnitt 3.1.3 näher untersucht, und ihr mittlerer Resonanzabstand wird ermittelt.

Außerdem fällt ein langwelliges Schwebungsmuster auf. Dieses resultiert aus dem Direktübertrag zwischen den Antennen und hängt von den Positionen der Antennen ab. Es ist für die weiteren Untersuchungen nicht von Interesse.

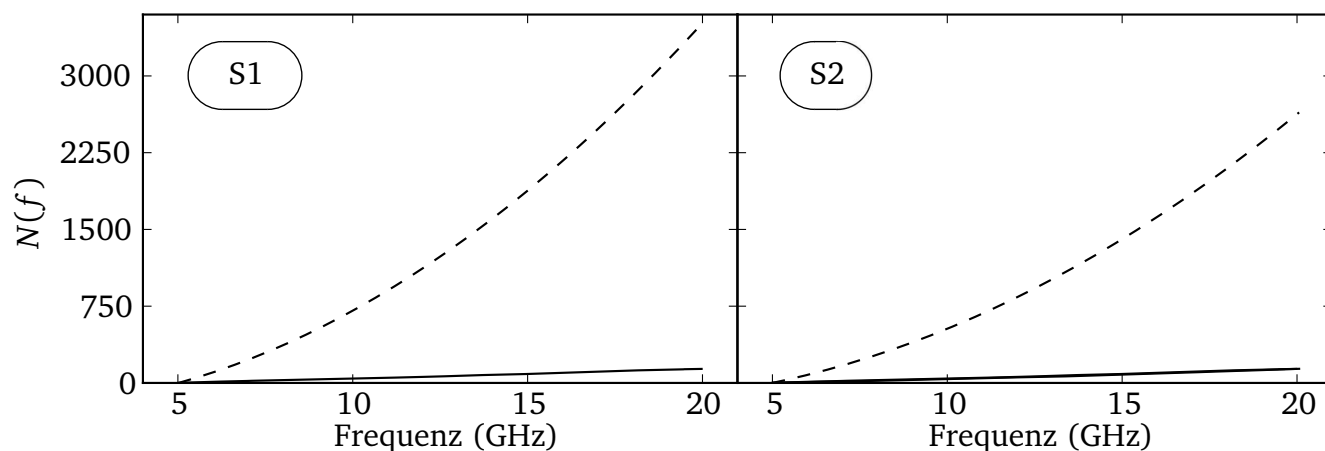


**Abbildung 5:** Die gemessenen Frequenzspektren: Oben ist das Spektrum des Stadions S1, unten das des Stadions S2 gezeigt. Die Einsätze zeigen die Form der beiden Resonatoren und die Positionen der verwendeten Antennen (Kreuze).

### 3.1.1 Resonanzen

Die Resonanzfrequenzen und Resonanzbreiten wurden mithilfe von GWignerFit, einem von Florian Schäfer [38] entwickelten Programm, aus den gemessenen Frequenzspektren extrahiert. Hierfür wurde eine Summe von Lorentzkurven an das gemessene Frequenzspektrum angepasst, wobei eine Lorentzkurve den Beitrag einer Resonanz  $j$  zum Spektrum beschreibt und die Form von Glg. (7) hat. Die hierdurch bestimmten Parameter sind die Resonanzfrequenzen  $f_j$  und die Resonanzbreiten  $\Gamma_j$ . Im Gegensatz zu supraleitenden Metallresonatoren werden bei offenen dielektrischen Resonatoren viele Resonanzen aufgrund ihrer großen Breite nicht erkannt (siehe Abschnitt 2.3.1). Ein weiterer Teil kann an der verwendeten Position der Antennen nicht angeregt werden. Die Positionen der Antennen wurden bewusst nicht auf die Symmetrieachsen des Stadions gelegt, um Moden aller Symmetrieklassen anregen zu können. Die Platzierung von Antennen an den Halbkreissegmenten des Stadions erwies sich als notwendig, um möglichst viele Resonanzen mit hoher Güte zu messen. Dies bedeutet, dass die Intensität der meisten Moden mit hoher Güte in den Halbkreissegmenten besonders groß ist. In [21] wurde vorausgesagt, dass es sich bei den Moden mit den höchsten Güten im dielektrischen Stadion um Flüstergalerie-artige Moden handelt, welche entlang der Berandung des Resonators lokalisiert sind. Diese Moden entsprechen periodischen Bahnen, welche sich entlang des Randes des Resonators bewegen und aufgrund ihrer großen Einfallswinkel durch innere Totalreflexion im Billard gehalten werden, was die vergleichsweise hohen Güten erklärt.

Die Güten  $Q_j$  der gemessenen Resonanzen (Glg. (9)) liegen in beiden Stadien etwa um  $\bar{Q} = 280$ . Die Güten der Gruppe von äquidistanten Resonanzen sind im Mittel etwas höher,  $\bar{Q}_{\text{äqui}} = 380$ . Dies ist, wie oben erklärt, ein Indiz dafür, dass diese Resonanzen eher zu Flüstergalerie-artigen Moden gehören, da eine solche Bahn durch Totalreflexion gehalten ist. Einige Resonanzen haben Güten von bis zu  $Q = 1000$ . Aus dem Vergleich mit Messungen an dielektrischen Kreisbillards aus Teflon [19], bei denen Güten von bis zu  $Q = 5000$  erreicht werden konnten und bei denen die Verluste fast völlig von den Absorptions- und Ohm'schen Verlusten dominiert wurden, lässt sich schließen, dass beim Stadion die Abstrahlung nach außen dominierend ist. Grund dafür ist vermutlich die nicht konstante Krümmung der Berandung der beiden Stadien.



**Abbildung 6:** Die Anzahl der gemessenen Resonanzen (durchgezogene Linie) im Vergleich mit der Zahl der Resonanzen nach der Weyl-Formel aus Glg. (11) (gestrichelte Linie).



Die Anzahl der Resonanzen im Resonator ist durch die Weyl-Formel (Glg. (11)) gegeben. In Abb. 6 ist sie gemeinsam mit der Anzahl der gemessenen Resonanzen zu sehen. In der Messung konnten im Stadion S1 137 von 3507, also 3,9% der Resonanzen, gemessen werden und im Stadion S2 138 von 2643, also 5,2% der Resonanzen. Dies ist vergleichbar mit den Ergebnissen aus [19]. Der Hauptgrund für diesen geringen Anteil ist, dass im dielektrischen Stadion die meisten Resonanzzustände aufgrund ihrer hohen Strahlungsverluste zu geringe Güten haben, um im Experiment gemessen werden zu können (siehe Abschnitt 2.3.1).

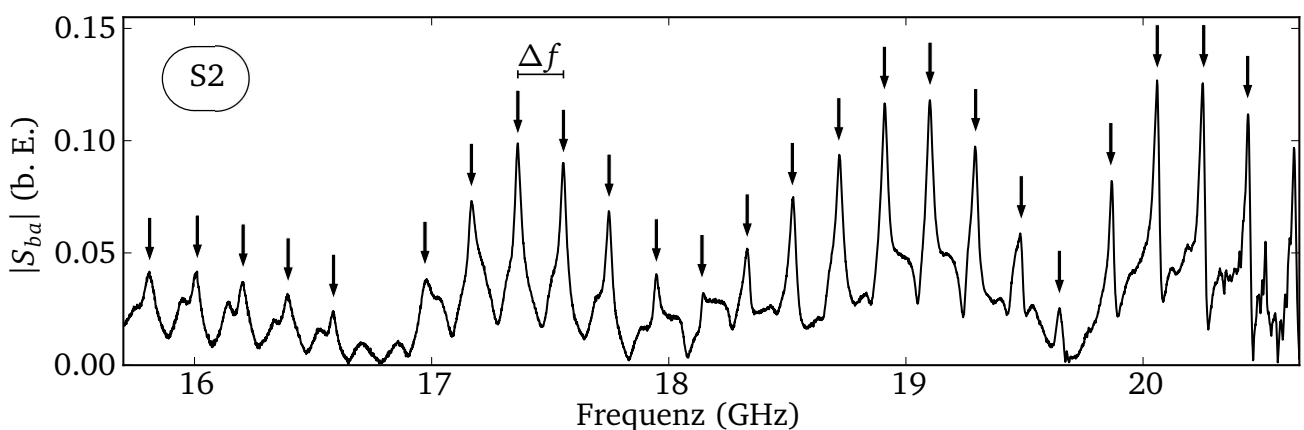
### 3.1.2 Bestimmung des Brechungsindex

Für die weitere Auswertung ist die Kenntnis des Brechungsindex  $n$  notwendig. Der Brechungsindex wurde durch Vergleiche der Position der Hauptmaxima des experimentellen Längenspektrums mit denen des semiklassischen Längenspektrums bestimmt. Dieses Verfahren wurde bereits in [19, 30] angewendet und wird in Abschnitt 3.3 noch näher erläutert. Die bestimmten und für die weitere Auswertung verwendeten Werte sind  $n = 1,425 \pm 0,002$  für das Stadion S1 bzw.  $n = 1,404 \pm 0,002$  für das Stadion S2. Damit ergibt sich für den kritischen Winkel  $\theta_{\text{krit}} = 44,6^\circ$  bzw.  $\theta_{\text{krit}} = 45,4^\circ$ . Die Rechteckbahn (Abb. 4a)) liegt für das Stadion S1 gerade noch im Bereich der inneren Totalreflexion während sie im Stadion S2 nicht mehr total reflektiert wird. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die nach diesem Verfahren bestimmten Brechungsindizes aufgrund von verbleibenden, minimalen Luftspalten leicht vom realen Brechungsindex des Teflon-Materials abweichen können [19, 32].

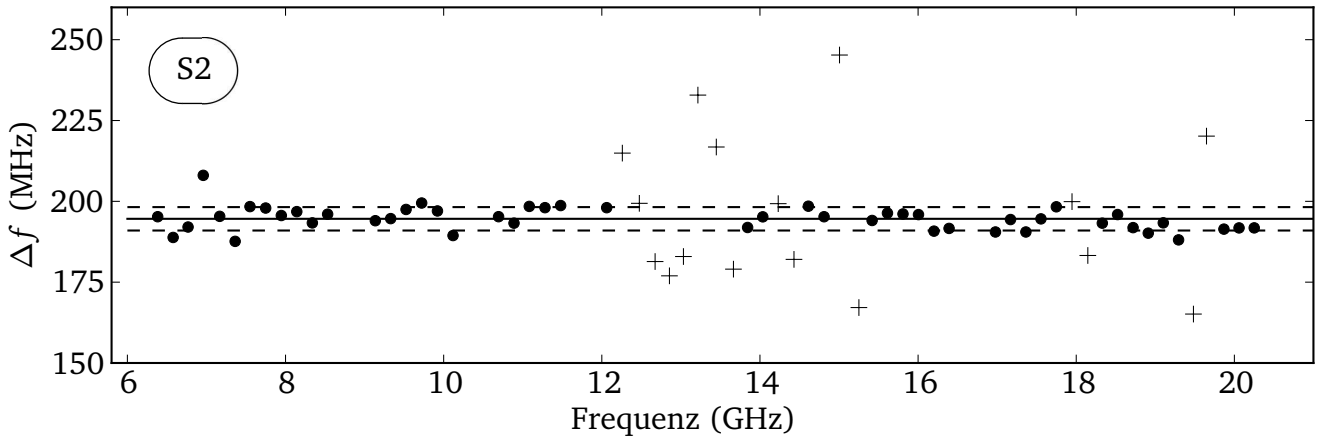
### 3.1.3 Mittlerer Resonanzabstand und charakteristische Länge

Frequenzspektren bestehend aus äquidistanten Resonanzen sind für geschlossene, chaotische Mikrowellenbillards nicht bekannt. Anders sieht dies dagegen im regulären dielektrischen Kreisbillard aus. Dort entsprechen die sogenannten Flüstergaleriemoden äquidistanten Resonanzen [19, 39]. Auch in stadionförmigen Mikrolasern aus Polymer ( $n \approx 1,5$ ) wurden bereits äquidistante Strukturen beobachtet [22, 27, 23].

Eine mögliche Erklärung für derartige Strukturen wäre, dass es sich bei den äquidistanten Resonanzen um eine Familie von Scar-Zuständen handelt. Scars („Narben“) wurden erstmals von



**Abbildung 7:** Ein Ausschnitt des gemessenen Spektrums des Stadions S2. Die Pfeile markieren die zur Bestimmung des mittleren Resonanzabstands  $\Delta f$  selektierten Resonanzen. Zwischen diesen befinden sich weitere Resonanzen mit meist geringerer Güte.



**Abbildung 8:** Dargestellt ist der Resonanzabstand der selektierten Resonanzen des Stadions S2 als Funktion der Frequenz. Die Punkte sind die zur Auswertung verwendeten Resonanzabstände, während die mit Kreuzen markierten Datenpunkte für die weitere Auswertung ignoriert wurden. Die durchgezogene Linie ist der mittlere Resonanzabstand  $\Delta f$  der verwendeten Messpunkte und die gestrichelten Linien die Standardabweichung von  $\Delta f$ .

Heller untersucht [40]: Wenn die Feldverteilung einer Mode hauptsächlich um eine bestimmte instabile periodische Bahn verteilt ist, nennt man diese Mode *scarred* (“vernarbt”). In chaotischen Resonatoren sind die meisten Moden nicht vernarbt, sondern über den gesamten Raum verteilt. Scars wurden bereits in Mikrolasern untersucht, z.B. in [41, 42]. In [21] wurden die Moden mit den höchsten Güten in einem stadionförmigen dielektrischen Resonator bereits numerisch als Scars identifiziert; allerdings für einen Brechungsindex von  $n = 3$ . In [24] wurde eine Methode vorgestellt, um aus äquidistanten Resonanzen die Länge von den periodischen Bahnen, um die die Moden lokalisiert sein könnten, abzuleiten. Allerdings wurde diese Methode dort nur auf einfache, nicht-chaotische Resonatorgeometrien angewandt. Sie basiert auf der Quantisierung einer Welle entlang der periodischen Bahn mit periodischen Randbedingungen. Die Resonanzfrequenzen  $f_j$  müssen dabei die Quantisierungsbedingung (vgl. Glg. (10) in [24])

$$f_j = \frac{c}{n\ell} j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N} \quad (25)$$

erfüllen, wobei  $\ell$  der Länge der periodischen Bahn entspricht. Wenn die äquidistanten Resonanzen zu Moden gehören, die um eine periodische Bahn lokalisiert sind, lässt sich also über den Frequenzabstand deren Länge zu

$$\ell = \frac{c}{n\Delta f} \quad (26)$$

bestimmen. Dabei ist  $\overline{\Delta f}$  der mittlere Resonanzabstand.

Die Untersuchung der äquidistanten Resonanzen kann an den Abbn. 7 und 8 nachvollzogen werden, wo exemplarisch die Ergebnisse von Stadion S2 abgebildet sind. In Abbildung 7 ist ein Ausschnitt des gemessenen Frequenzspektrums dargestellt. Es wurden die Resonanzen hoher Güte ausgewählt und die häufig dicht an diesen liegenden kleineren Resonanzen ignoriert. In

Abb. 8 ist der Resonanzabstand  $\Delta f$  in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Es ist erkennbar, dass der mittlere Resonanzabstand über das gesamte Spektrum in etwa konstant ist. Einige Datenpunkte wurden aus der weiteren Untersuchung ausgeschlossen. Diese sind in Abb. 8 durch Kreuze markiert und liegen deutlich oberhalb und unterhalb des mittleren Frequenzabstands. Das sie paarweise stark abweichen, kann dadurch erklärt werden, dass sich eine Resonanz im Frequenzspektrum durch Interferenz mit einer anderen verschiebt.

Das Ergebnis der Auswertung ist eine charakteristische Länge von  $\ell_1 = (1,272 \pm 0,029)$  m im Stadion S1 bzw.  $\ell_2 = (1,097 \pm 0,020)$  m im Stadion S2. Diese Längen betragen 94,7% bzw. 96,1% des Umfangs des Stadions, was die Vermutung stützt, dass es sich bei den äquidistanten Resonanzen um Flüstergaleriemoden handelt. Ob diese Längen einer periodischen Bahn zugeordnet werden können, wird in Abschnitt 3.3 durch einen Vergleich mit den Längen der periodischen Bahnen im Längenspektrum näher untersucht.

---

## 3.2 Berechnung der Spurformel

---

Zur Berechnung des semiklassischen Längenspektrums (siehe Abschnitt 2.6) wird die Spurformel für instabile periodische Bahnen, Glg. (17), verwendet. Die marginal stabile Bouncing-Ball-Familie (siehe Abb. 4b)) wird ausgelassen. Diese Bahnen haben eine Länge von  $2r = 0,6$  m und liegen nicht in dem im folgenden betrachteten Längenbereich. Außerdem ist zu erwarten, dass der Beitrag dieser Bahnen aufgrund des Einfallswinkels von  $0^\circ$  sehr stark verringert ist; das gilt insbesondere für die Wiederholungen.

Zur Berechnung der Spurformel müssen die periodischen Bahnen bestimmt werden. Die hierfür benutzte Methodik wird im nächsten Abschnitt besprochen. Im Abschnitt 3.2.2 wird der Einfluss der räumlichen Symmetrie und der Symmetrie unter Zeitumkehr auf die Amplitude der periodischen Bahnen behandelt.

---

### 3.2.1 Berechnung der periodischen Bahnen im Stadionbillard

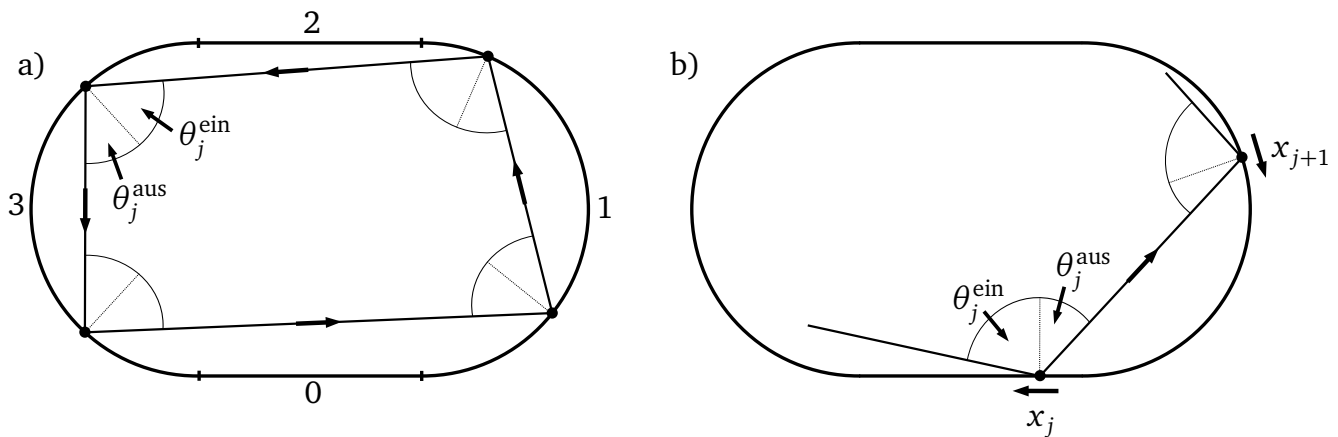
---

Zur Berechnung der Bahnen wurde die symbolische Dynamik aus [43] verwendet. Jede Reflexion an einem der vier Randsegmente wird durch ein Symbol codiert; dies ist in Abb. 9a) an einem Beispiel dargestellt. Eine zunächst unphysikalische Bahn mit  $N$  Reflexionen wird durch einen Code aus  $N$  Symbolen beschrieben. Physikalisch sinnvoll wird eine Bahn erst dann, wenn das Reflexionsgesetz  $\theta_j^{\text{aus}} - \theta_j^{\text{ein}} = \Delta\theta_j = 0$  für alle  $N$  Reflexionen gleichzeitig erfüllt ist. Für die Bahn aus Abb. 9a) ist dies nicht der Fall, aber für die Rechteckbahn aus Abb. 4a), welche durch den selben Code beschrieben ist. Es ist also das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_1(x_0, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \Delta\theta_N(x_{N-1}, x_N, x_{N+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

zu lösen, wobei  $x_j$  die Position der  $j$ -ten Reflexion an der Berandung angibt. Es gilt  $x_0 = x_N$  und  $x_{N+1} = x_1$ , da die Bahn geschlossen ist.

Dieses Gleichungssystem lässt sich für hinreichend gute Startwerte  $x_j$  direkt durch das Newton-Verfahren lösen. Hier wurde eine Broyden-Methode [44] verwendet. Mit diesem Verfahren konnte das Gleichungssystem (27) für 95% der Codes mit weniger als 20 Iterationen und einem Fehler  $|\Delta\theta_j| < (10^{-11})^\circ$  gelöst werden. Zusammengefasst ist die direkte Lösung über die Broyden-Methode schnell, auch für Bahnen mit einer großen Anzahl an Reflexionen



**Abbildung 9:** a) Die vier Symbole (0,1,2,3) werden zur Codierung der Reflexionen an den vier Randsegmenten verwendet. Zu der gezeigten Bahn gehört der Code 1133. Diese Bahn ist unphysikalisch, da die Reflexionswinkel nicht das Reflexionsgesetz Glg. (27) erfüllen. b) Die Reflexionspositionen  $x_j$  sind entlang der Berandung parametrisiert. Die eingezeichneten Pfeile zeigen die Dynamik der Reflexionspunkte  $x_j$  die durch die Differentialgleichung (28) gegeben ist.

( $N > 200$ ). Allerdings konvergiert sie für manche Codes nicht zuverlässig, hierzu gehören aber nur Codes, welche Bahnen mit einer Länge größer als der des Umfangs des Stadions entsprechen. Für solche Fälle benötigt man zusätzlich die nachfolgend beschriebene Methode.

Die Berechnung der periodischen Bahnen kann auch mit Hilfe einer von Biham und Kvale 1992 entwickelten Methode bewerkstelligt werden. Verwendet wird dabei ein speziell für das Stadion entwickeltes Differentialgleichungssystem [43]

$$\frac{dx_j}{dt} = \pm \left| \cos \left[ \theta_j^{\text{aus}}(x_j, x_{j+1}) \right] - \cos \left[ \theta_j^{\text{ein}}(x_{j-1}, x_j) \right] \right|. \quad (28)$$

Hier wird eine Zeit  $t$  und eine Zeitableitung eingeführt welche die Verschiebung der Punkte  $x_j$  auf der Berandung beschreibt. Dabei wird das Vorzeichen so gewählt, dass  $x_j$  sich auf den geraden Segmenten der Berandung in Richtung des kleineren, auf den gekrümmten in Richtung des größeren der Ein- und Ausfallswinkel bewegt; dies ist in Abb. 9b) demonstriert. Das Differentialgleichungssystem Glg. (28) kann mithilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung gelöst werden. Der Vorteil des Differentialgleichungssystems ist, dass scheinbar für jeden Satz von Anfangswerten der Parameter  $x_j$  die Lösung konvergiert; zumindestens wurde kein Gegenbeispiel gefunden. Die Codes, für die das Gleichungssystem Glg. (27) mit dem ersten Verfahren nicht gelöst werden konnte, wurden mit dieser Methode überprüft. Es zeigte sich, dass die Parameter für diese Codes gegen unphysikalische Lösungen konvergieren.

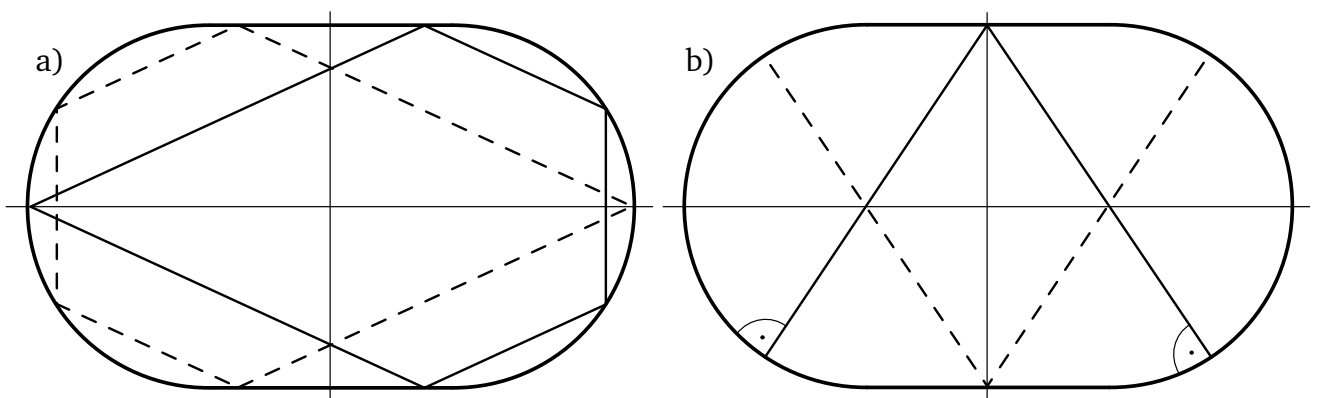
Die Codierung der Bahnen basiert auf sechs verschiedenen Symbolen. Die vier in Abb. 9a) für die Reflexionen an den vier Randsegmenten eingeführten, und zwei zusätzliche, welche in den Halbkreissegmenten den Umlaufsinn symbolisch charakterisieren [43]. Für die Bestimmung der für das Experiment relevanten periodischen Bahnen wurden alle mit den sechs Symbolen möglichen Codesequenzen bis zu einer Länge von zwölf Symbolen verwendet. Das entspricht einer Anzahl von  $6^{12} \approx 10^9$  Codes. Ein großer Teil der Codes kann schon zuvor anhand der in [43] entwickelten Auswahlregeln aussortiert werden. Dennoch bleibt die Zahl der möglichen Codes

enorm, weshalb die Länge der Codes auf zwölf beschränkt wurde. Dies wirkt sich auf den gesamten Längenbereich aus, das heißt es fehlen Bahnen aller Längen. Im folgenden interessieren uns nur die Bahnen mit Längen kleiner als der Umfang des Stadions, da wir nur diesen Bereich des Längenspektrums betrachten wollen. Um den Effekt der in diesem Bereich fehlenden Bahnen zu untersuchen, wurden speziell ausgewählte Codes bis zu einer Länge von 100 Symbolen hinzugefügt. Diese zusätzlichen Codes gehören alle zu Flüstergalerie-artigen periodischen Bahnen, sodass deren Längen nah am Umfang liegen. In der Tat sind periodische Bahnen mit 100 Reflexionen und einer Länge kleiner als dem Umfang des Stadions in ihrer Form kaum von der Berandung des Stadions zu unterscheiden. Es zeigt sich, dass sie außerdem mit zunehmender Zahl der Reflexionen immer instabiler werden und somit ihr Beitrag zur Spurformel nur sehr gering ist. Der Unterschied zu einem semiklassischen Längenspektrum ohne diese zusätzlichen Bahnen ist daher sehr klein und wird vorrangig im Längenbereich knapp unterhalb des Umfangs des Stadions beobachtet. Hierdurch ist sichergestellt, dass genügend Bahnen in der Spurformel verwendet wurden, um ein aussagekräftiges semiklassisches Längenspektrum zu erhalten.

### 3.2.2 Symmetrie und Umlaufsinn

Das zweidimensionale Stadion hat zwei Symmetrieachsen bzgl. Raumspiegelungen. Dies ist in Abb. 10 gezeigt. Die Bahnen im Stadion können also entweder zwei, eine oder keine Spiegelsymmetrie besitzen. Die Spurformel ist eine Summe über alle periodischen Bahnen, das heißt jede periodische Bahn *im Phasenraum* muss berücksichtigt werden. Nun liefert eine Spiegelung an einer der beiden Symmetrieachsen des Stadions eine weitere periodische Bahn, wenn die Bahn nicht bezüglich dieser Achse symmetrisch ist. Diese Bahn hat die selben Eigenschaften wie ihr Spiegelbild aber andere Punkte im Phasenraum.

Eine weitere Symmetrie ergibt sich, wenn man den Umlaufsinn umkehrt. Bei den meisten Bahnen kann man von einem Umlauf in beiden Richtungen sprechen, wie z.B. bei der Bahn in Abb. 10a). Der Umlauf im Uhrzeigersinn entspricht einer Bahn im Phasenraum und derjenige



**Abbildung 10:** Das Stadion mit seinen beiden Symmetrieachsen (jeweils die senkrechte und horizontale Gerade). a) Die eingezeichnete Bahn ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der horizontalen Achse. Durch Spiegelung an der vertikalen Achse entsteht eine Bahn mit gleichen Eigenschaften (gepunktete Linie) aber anderen Koordinaten im Phasenraum. b) Die gezeigte Bahn ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der vertikalen Achse. Außerdem läuft sie in sich selbst zurück. Das bedeutet, dass die im Phasenraum abgelaufenen Punkte identisch sind beim vorwärts- und rückwärts ablaufen der Bahn.

entgegen dem Uhrzeigersinn einer weiteren Bahn. Da der Impuls dabei sein Vorzeichen ändert, durchläuft diese andere Punkte im Phasenraum. Anders dagegen ist dies bei Bahnen, die in sich selbst zurücklaufen. Solche Bahnen treffen senkrecht auf die Berandung, das heisst der Reflexionswinkel ist  $0^\circ$ . Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 10b) gezeigt. Bei dieser Bahn kann man nicht zwischen vorwärts und rückwärts, bzw. einem Umlauf mit oder gegen den Uhrzeigersinn unterscheiden. Daher durchlaufen eine solche Bahn und die entgegengesetzt laufende Bahn genau die selben Punkte im Phasenraum.

In dieser Auswertung wurden in Glg. (23) die Bahnen, die durch eine Spiegelung ineinander übergehen, zu einer Bahn  $p$  mit einem Symmetriefaktor  $a_p^{\text{sym}}$  zusammengefasst. Jede fehlende Spiegelsymmetrie einer Bahn wird mit einem zusätzlichen Faktor zwei in Glg. (24) berücksichtigt. Wenn die Bahn nicht in sich selbst zurückläuft, d.h. keiner der Reflexionswinkel null ist, kommt ein weiterer Faktor 2 hinzu [45, 46]. Die Bahn in Abb. 10a) hat beispielsweise den Symmetriefaktor  $a_p^{\text{sym}} = 2 \cdot 2$  erhalten, da sie nur eine Spiegelsymmetrie bzgl. der horizontalen Spiegelsymmetrieachse besitzt und keinen bzgl. der vertikalen. Die Bahn in Abb. 10b) dagegen hat nur den Symmetrie-Faktor  $a_p^{\text{sym}} = 2$ , da sie nur eine Spiegelsymmetrie hat, aber in sich selbst überläuft.

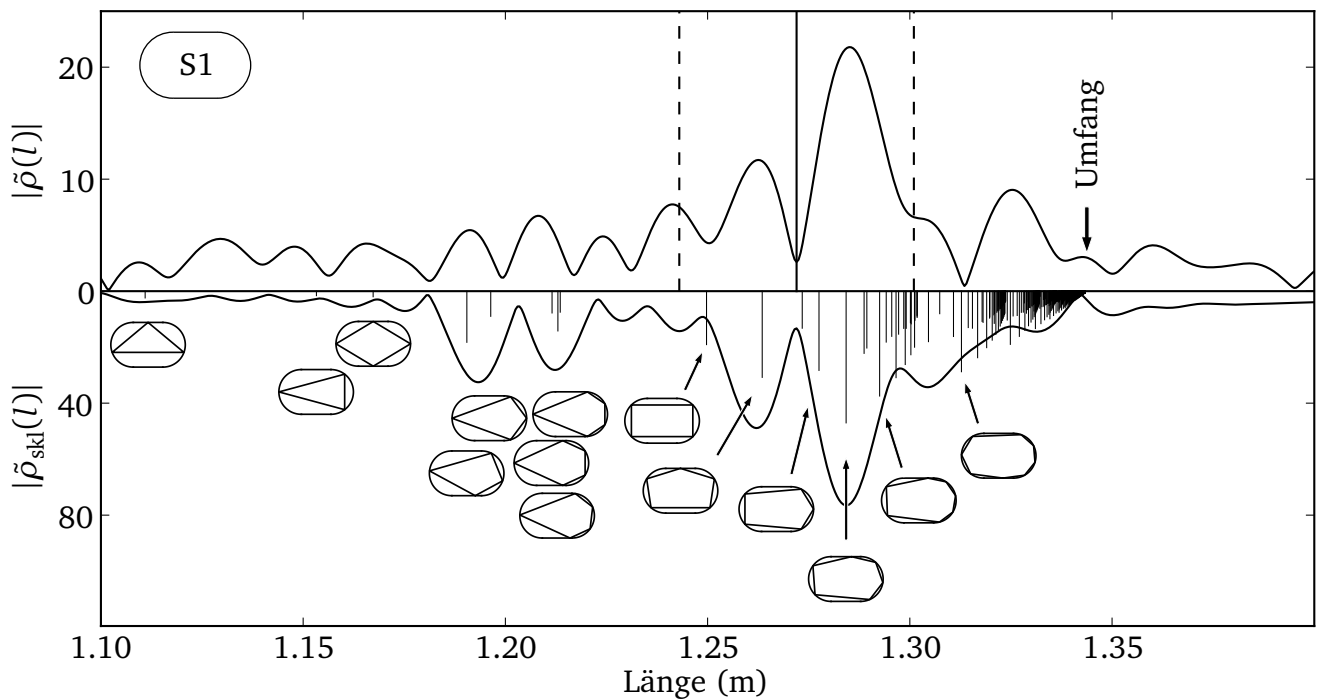
Der Betrag der vollständigen Amplitude  $A_{r,p}$  einer Gruppe von Bahnen, die durch die oben genannten Symmetrien ineinander übergehen, ist also

$$A_{r,p} = a_p^{\text{sym}} |a_{r,p}|, \quad (29)$$

wobei  $a_{r,p}$  die durch Glg. (24) gegebenen komplexen Amplitude ist.

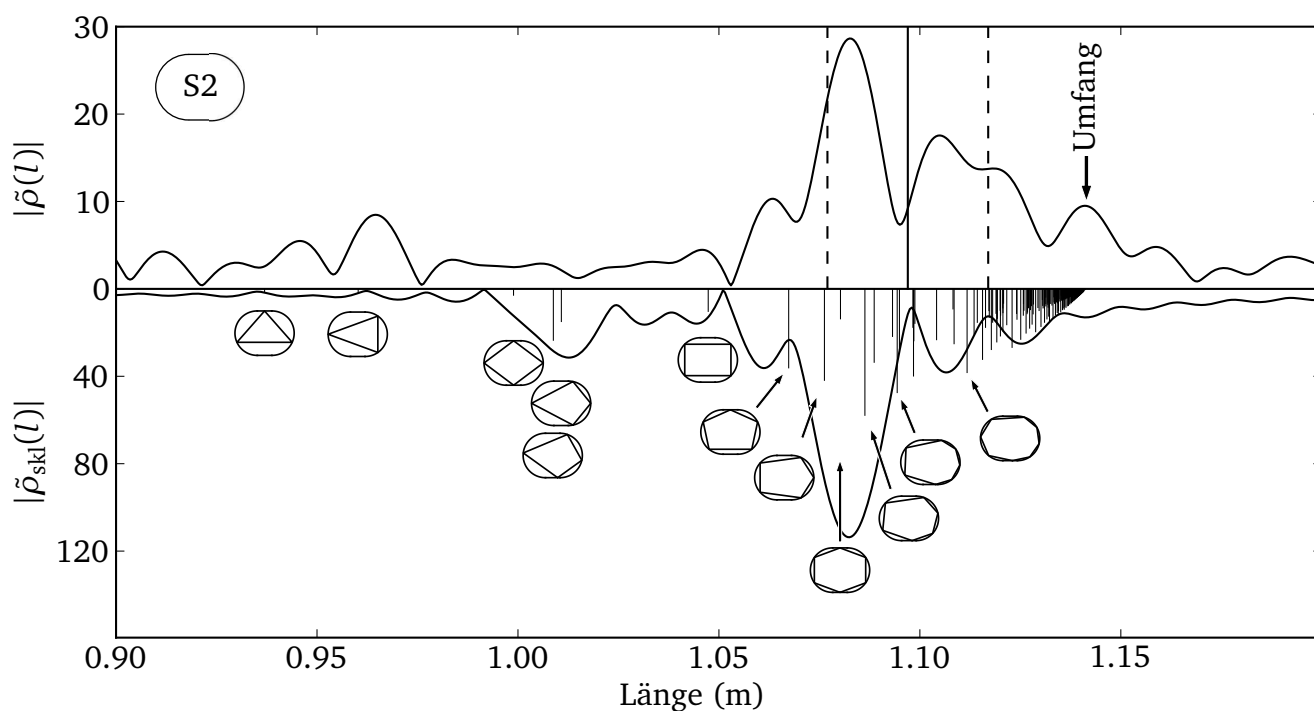
### 3.3 Vergleich der Spurformel mit dem experimentellen Längenspektrum

Der Vergleich des experimentellen Längenspektrums nach Glg. (22) mit dem semiklassischen Längenspektrum nach Glg. (23) ist in Abb. 11 für Stadion S1 und in Abb. 12 für Stadion S2 dargestellt. Hierfür wurde der Frequenzbereich von 5 GHz bis 20 GHz ausgewertet. Betrachtet wird jeweils der Längenbereich ab der Längen der ersten Dreiecks-Bahn bis zum Umfang (durch einen Pfeil markiert). Das experimentelle Längenspektrum für Stadion S1 hat im betrachteten Längenbereich zwei prominente Maxima bei 1,262 m und 1,285 m. Im semiklassischen Längenspektrum befinden sich bei den gleichen Längen zwei sehr ähnliche Maxima. Tatsächlich wurde anhand der Position dieser beiden Maxima der Brechungsindex des Stadions bestimmt (siehe Abschnitt 3.1.2). Für das Stadion S2 (Abb. 12) wurden die Maxima bei 1,083 m und 1,104 m verwendet. Auch deren Formen werden durch das entsprechende semiklassische Längenspektrum gut wiedergegeben. Die Amplitude dieser Maxima beträgt im experimentellen Längenspektrum jedoch bei beiden Stadien nur etwa 25% der Amplitude im semiklassischen. Dies hängt damit zusammen, dass in der Messung etwa 95% der Resonanzen nicht beobachtet wurden. In den Abbn. 11 und 12 zeigen die Positionen der senkrechten Linien die Längen  $l_p$  der entsprechenden periodischen Bahn und die Längen der Linien die Amplituden  $A_{r,p}$  nach Glg. (29) an. Außerdem sind einige Bahnen in den Einsätzen dargestellt. Im Bereich unterhalb von 1,25 m (1,05 m) befinden sich die periodischen Bahnen von Stadion S1 (S2), welche nicht durch innere Totalreflexion gebunden sind, da sie zu kleine Einfallswinkel besitzen. Die experimentellen Längenspektren zeigen in diesem Längenbereich aufgrund des begrenzten Messbereichs und der begrenzten Anzahl der gefundenen Resonanzen nur Untergrund. Dies wurde durch Variation der Anzahl der für das Längenspektrum verwendeten Resonanzen überprüft und wird später an dem Vergleich mit einer Rechnung deutlich. Das Niveau des Untergrunds liegt bei  $|\tilde{\rho}| \approx 4$ .



**Abbildung 11:** Das Längenspektrum des Stadions S1. Der obere Teil zeigt das experimentelle Längenspektrum. Die durch Glg. (25) aus den äquidistanten Resonanzen bestimmte charakteristische Länge  $\ell$  ist durch die durchgezogene senkrechte Linie markiert; die gestrichelten Linien zeigen  $\ell \pm \Delta\ell$  an wobei  $\Delta\ell$  sich aus der Standardabweichung von  $\overline{\Delta f}$  in Abb. 8 ergibt. Der Umfang des Stadions ist mit einem Pfeil markiert. Im unteren Teil der Abbildung ist das semiklassische Längenspektrum gezeigt. Die Positionen der dünnen senkrechten Linien entsprechen den Längen  $l_p$  der periodischen Bahnen und die Längen der Linien den Amplituden  $A_{r,p}$  nach Glg. (29). Zusätzlich sind einige der wichtigsten periodischen Bahnen als Piktogramme eingezeichnet. Man beachte die unterschiedlichen Skalen im oberen und unteren Teil der Abbildung.

Tatsächlich heben sich in den experimentellen Längenspektren nur jeweils die zwei bereits oben erwähnten Hauptmaxima deutlich vom Untergrund ab. Diese Hauptmaxima kommen jeweils durch den Beitrag mehrerer, zum Teil dicht beieinander liegender, periodischer Bahnen zustande, wie der untere Teil in den Abbn. 11 und 12 zeigt. Dabei handelt es sich um Bahnen, welche durch innere Totalreflexion im Billard gehalten werden. Im Längenbereich dieser Bahnen findet man die beste Übereinstimmung zwischen dem experimentellen und dem semiklassischen Längenspektrum. Kurz unterhalb der Länge des Umfangs, also zwischen 1,32 m und 1,34 m (S1) bzw. 1,12 m und 1,14 m (S2), befindet sich eine sehr große Zahl von periodischen Bahnen. Dabei handelt es sich um Flüstergalerie-artige Bahnen, deren Form sich immer mehr der Berandung annähert und deren Amplituden immer kleiner werden. In diesem Längenbereich ist die Übereinstimmung zwischen experimentellem und semiklassischem Längenspektrum nicht mehr so gut. Zusammenfassend stellt man folgendes fest: Für totalreflektierte periodische Bahnen stimmen das experimentelle und das semiklassische Längenspektrum qualitativ gut überein, jedoch ist die Amplitude des experimentellen Längenspektrums aufgrund der vielen fehlenden



**Abbildung 12:** Das Längenspektrum des Stadions S2. Der obere Teil zeigt das experimentelle Längenspektrum. Die durch Glg. (25) aus den äquidistanten Resonanzen bestimmte charakteristische Länge  $\ell$  ist durch die durchgezogene senkrechte Linie markiert; die gestrichelten Linien zeigen  $\ell \pm \Delta\ell$  an wobei  $\Delta\ell$  sich aus der Standardabweichung von  $\Delta f$  in Abb. 8 ergibt. Der Umfang des Stadions ist mit einem Pfeil markiert. Im unteren Teil der Abbildung ist das semiklassische Längenspektrum gezeigt. Die Positionen der dünnen senkrechten Linien entsprechen den Längen  $l_p$  der periodischen Bahnen und die Längen der Linien den Amplituden  $A_{r,p}$  nach Glg. (29). Zusätzlich sind einige der wichtigsten periodischen Bahnen als Piktogramme eingezeichnet. Man beachte die unterschiedlichen Skalen im oberen und unteren Teil der Abbildung.

Resonanzen im gemessenen Frequenzspektrum um etwa einen Faktor 4 kleiner. Deutliche Maxima sind im experimentellen Längenspektrum nur für totalreflektierte Bahnen zu beobachten. Diese Ergebnisse stimmen mit denen für reguläre dielektrische Resonatoren in [19] überein. Allerdings lassen sich im Falle der stadionförmigen Resonatoren die Maxima für einzelne periodische Bahnen nicht auflösen, da die Bahnen meist sehr dicht beieinander liegen. Hierfür benötigt man einen deutlich größeren Frequenzbereich.

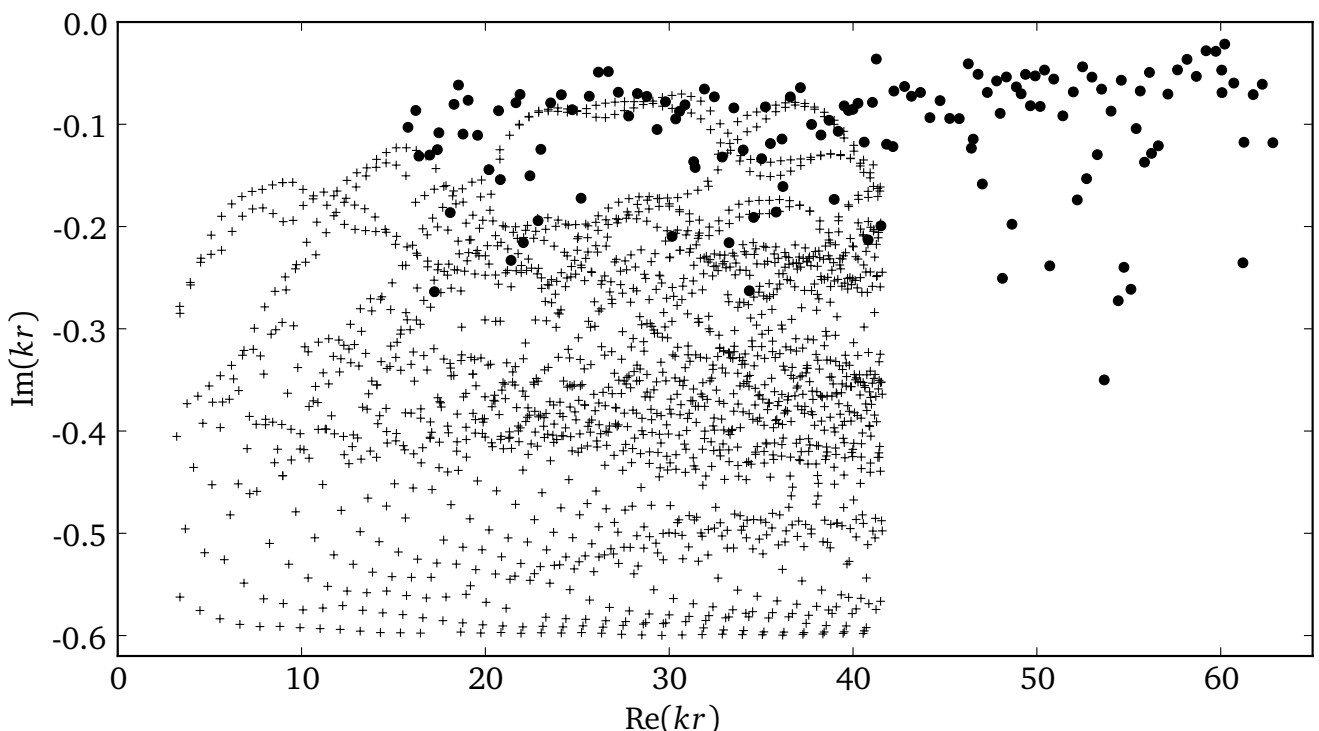
Die in Abschnitt 3.1.3 aus den äquidistanten Resonanzen nach Glg. (26) ermittelte charakteristische Länge  $\ell$  (senkrechte durchgezogene Linie) ist mit ihren Abweichungen (senkrechte gestrichelte Linien) in Abbn. 11 und 12 markiert. Diese Länge liegt im Bereich der totalreflektierten periodischen Bahnen, was die im Vergleich höheren Güten der entsprechenden Resonanzen erklärt. Allerdings kann die charakteristische Länge keiner bestimmten Bahn zugeordnet werden, da in dem durch die Abweichungen aufgespannten Bereich viele periodische Bahnen liegen. Eine Zuordnung der äquidistanten Resonanzen zu einer bestimmten periodischen Bahn ist in dieser einfachen Form für chaotische Billards offensichtlich nicht möglich (für einfache



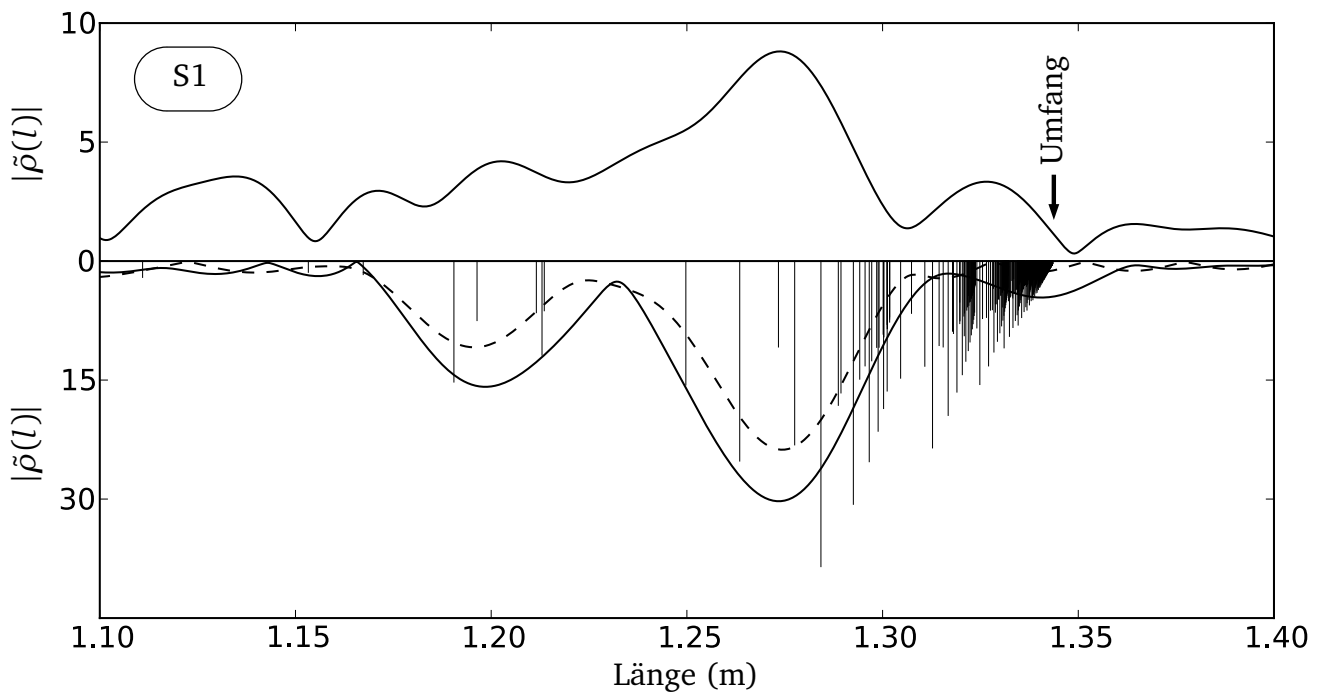
Systeme hingegen schon, siehe [24]). Vermutlich wurden die äquidistanten Peaks nicht durch vernarbte Moden verursacht. Dies lässt sich hier allerdings nicht abschließend klären. Aus den präsentierten Ergebnissen können wir schlussfolgern, dass man in chaotischen dielektrischen Resonatoren keine einfache Zuordnung zwischen bestimmten (Familien von) Resonanzen und bestimmten periodischen Bahnen vornehmen kann.

### 3.4 Vergleich der Spurformel mit einer numerischen Rechnung

In Abb. 13 werden die gemessenen Resonanzen von Stadion S1 mit den aus einer numerischen Rechnung [47] bestimmten Eigenwerten verglichen. Es ist  $\text{Im}(kr)$ , welches proportional zur Breite der Resonanz ist, über  $\text{Re}(kr)$  aufgetragen. Mit  $r = 150$  mm entspricht  $\text{Re}(kr) = 30$  einer Resonanzfrequenz von 9,5 GHz und  $\text{Im}(kr) = -0,2$  einer Resonanzbreite von 127 MHz (siehe Gln. (5) und (6)). Die Resonanzen mit den höchsten Güten liegen im oberen, die mit den niedrigsten Güten im unteren Bereich der Abbildung. Wie anhand des Vergleichs sichtbar wird, wurden in der Messung hauptsächlich Resonanzen mit kleiner Breite gefunden. Diese langlebigen Resonanzen stimmen recht gut mit der obersten Zeile von simulierten Eigenwerten überein. Resonanzen geringer Güte kann man im Experiment nicht identifizieren, daher befinden sich die Datenpunkte der Messung hauptsächlich im oberen Bereich der Abbildung. Leider liegt der Schnittbereich der Messung mit der Rechnung nur zwischen 16 und 42 auf der  $\text{Re}(kr)$ -Achse. Dies entspricht dem Frequenzbereich von 5 GHz bis 13,2 GHz. Um das Längenspektrum der Messung mit dem der numerischen Rechnung vergleichen zu können, wurde für die Be-



**Abbildung 13:** Die gemessenen Resonanzen (Punkte) im Vergleich mit den Eigenwerten einer numerischen Rechnung (Kreuze). Die experimentellen Datenpunkte befinden sich hauptsächlich im oberen Bereich der Abbildung, da nur Resonanzen hoher Güte (kleines  $|\text{Im}(kr)|$ ) im gemessenen Spektrum identifiziert werden können. Die numerische Rechnung wurde nur bis  $\text{Re}(kr) = 41,6$  ausgeführt.



**Abbildung 14:** Vergleich des experimentellen Längenspektrums (durchgezogene Kurve) im oberen Teil mit dem semiklassischen der Spurformel (durchgezogene Kurve) und dem der numerischen Rechnung (gestrichelte Kurve) im unteren Teil. Der Umfang ist mit einem Pfeil markiert und die Positionen der dünnen senkrechten Linien entsprechen den Längen  $l_p$  der periodischen Bahnen und die Längen der Linien den Amplituden  $A_{r,p}$  nach Glg. (29).

rechnung des Längenspektrums nur der Teil der Resonanzen im Schnittbereich verwendet. Von der Messung bleiben dadurch nur 72 Resonanzen von 137 übrig und von der Rechnung 1408 Eigenwerte. Der Vergleich des Längenspektrums dieser Resonanzen mit dem semiklassischen Längenspektrum ist in Abb. 14 dargestellt. Im oberen Teil ist das gemessene Längenspektrum dargestellt, während im unteren das semiklassische Längenspektrum (durchgezogene Kurve) im Vergleich zum Längenspektrum der Rechnung (gestrichelte Kurve) zu sehen ist. Betrachtet wird der Längenbereich ab der Länge der ersten Dreiecks-Bahn bis zum Umfang des Stadions (durch einen Pfeil markiert). Zu beachten ist, dass wegen des Beschränkens der Menge der Resonanzen auf den Schnittbereich der Messung und der Rechnung das gemessene und das semiklassische Längenspektrum eine andere Form annehmen als in Abb. 11. Die beiden zuvor beobachteten großen Maxima sind zu einem breiten Maxima bei 1,274 m geworden. Das selbe ist auch im semiklassischen Längenspektrum und in dem der numerischen Rechnung zu beobachten. Außerdem ist nun das semiklassische Längenspektrum im Vergleich zu den in Abb. 14 eingezeichneten Amplituden der einzelnen Bahnen (senkrechte Linien) niedriger. Dies lässt sich durch stärkere Interferenz der Bahnen aufgrund der nun größeren Breiten ihrer Sinc-Kurven erklären (siehe Glg. (23)).

Im gesamten Längenbereich stimmen das semiklassische Längenspektrum und das numerisch berechnete qualitativ gut überein. Beide geben das Hauptmaximum des experimentellen Län-

---

genspektrums wieder. Allerdings weist das semiklassische Längenspektrum im gesamten Bereich eine höhere Amplitude auf. Dies ist zunächst nicht zu erklären, da das numerisch berechneten Spektren bis auf wenige Resonanzen, deren Breite so groß ist, dass sie keinen merklichen Beitrag zum Längenspektrum liefern, vollständig ist. Der Untergrund im experimentellen Längenspektrum zeigt sich unterhalb von 1,17 m besonders deutlich. Im Längenspektrum der numerisch berechneten Eigenwerte ist er vergleichsweise klein. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass numerisch weit mehr Eigenwerte gefunden wurden als im Experiment detektiert wurden. Hierdurch wird der Einfluss der Anzahl der Resonanzen auf den Untergrund deutlich. Zusammenfassend wird aus dem Vergleich ersichtlich, dass die Spurformel qualitativ mit dem Ergebnis der numerischen Rechnung übereinstimmt. Die Spurformel funktioniert bis auf eine kleine Abweichung der Amplitude gut.

---

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

---

Das Ziel dieser Arbeit war es, die von Bogomolny *et al.* [12] vorgeschlagene Spurformel für chaotische dielektrische Resonatoren experimentell zu testen. Hierfür wurde ein Experiment mit zwei stadionförmigen Mikrowellenresonatoren aus Teflon durchgeführt. Für beide Resonatoren wurde das Frequenzspektrum gemessen. Aus diesen Frequenzspektren konnten etwa 5% der durch die Weyl-Formel gegebenen Anzahl von Resonanzen ermittelt werden.

Eine Gruppe von äquidistanten Resonanzen im Frequenzspektrum wurde untersucht. Der mittlere Resonanzabstand dieser Resonanzen wurde bestimmt und es wurde in Analogie zu der in [24] entwickelten Methodik eine diesem Resonanzabstand entsprechende charakteristische Länge abgeleitet. Eine Zuordnung dieser charakteristischen Länge zu einer bestimmten Bahn war, anders als in [24], wo dies für einfache nicht chaotische Resonatorgeometrien gelang, allerdings nicht möglich.

Aus den gemessenen Resonanzen wurde das Längenspektrum berechnet und mit dem semiklassisch durch die Spurformel vorausgesagten Längenspektrum verglichen und eine qualitativ gute Übereinstimmung gefunden. Allerdings waren die Amplituden des gemessenen Längenspektrums aufgrund der fehlenden Resonanzen um einen Faktor 4 kleiner als die korrespondierenden im semiklassischen. Die Übereinstimmung des gemessenen Längenspektrums mit dem semiklassischen ist besonders gut im Bereich der totalreflektierten Bahnen, während die im Bereich nicht totalreflektierter Bahnen durch die Spurformel vorausgesagten Maxima nicht wiedergegeben wurden, ähnlich wie in [19].

Des Weiteren wurden numerisch berechnete Eigenwerte zu einem Vergleich herangezogen. Aus den Resonanzen im gemeinsamen Frequenzbereich der Messung und der numerischen Rechnung wurde jeweils das Längenspektrum bestimmt und mit der Spurformel verglichen. Zwischen der numerischen Rechnung und der Spurformel zeigte sich eine gute Übereinstimmung und beide gaben das Ergebnis der Messung qualitativ wieder. Die Amplitude des Längenspektrums der Spurformel war jedoch etwas höher als die des numerisch berechneten. Dies kann vermutlich durch Verwendung von korrigierten Fresnelkoeffizienten für Reflexionen an gekrümmten Grenzflächen entlang der Halbkreissegmente des Stadions verbessert werden [27, 48].

Das Fazit dieser Arbeit ist, dass die von Bogomolny *et al.* [12] vorgeschlagene Spurformel die Positionen der Maxima gut wiedergibt und auch erfolgreich auf chaotische dielektrische Resonatoren angewandt werden kann. Für die weitere Zukunft bleibt der Test korrigierter Fresnelkoeffizienten offen. Außerdem könnte die Untersuchung eines Stadions mit einem Formfaktor  $\epsilon > 1$  interessant sein. Für solch ein Stadion werden im Längenspektrum wesentliche Beiträge von Bahnen, die länger als der Umfang des Stadions sind, sogenannte “bow-tie-orbits”, deren Bahnen sich achtförmig überkreuzen, vermutet.

---

## Literatur

---

- [1] H. G. Schuster: *Deterministic Chaos* (VHC, Weinheim, 1989).
- [2] L. A. Bunimovich: *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards*, Commun. Math. Phys. **65**, 295 (1979).
- [3] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit: *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [4] M. C. Gutzwiller: *Energy Spectrum According to Classical Mechanics*, J. Math. Phys. **11**, 1791 (1970).
- [5] M. C. Gutzwiller: *Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions*, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
- [6] O. Bohigas and P. Leboeuf: *Nuclear Masses: Evidence of Order-Chaos Coexistence*, Phys. Rev. Lett. **88**, 092502 (2002).
- [7] M. L. Du and J. B. Delos: *Effect of Closed Classical Orbits on Quantum Spectra: Ionization of Atoms in a Magnetic Field*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1731 (1987).
- [8] A. Wirzba, N. Søndergaard and P. Cvitanović: *Wave chaos in elastodynamic cavity scattering*, Europhys. Lett. **72**, 534 (2005).
- [9] M. Avlund, C. Ellegaard, M. Oxborrow, T. Guhr and N. Søndergaard: *Observation of Periodic Orbits on Curved Two-Dimensional Geometries*, Phys. Rev. Lett. **104**, 164101 (2010).
- [10] R. Balian and B. Duplantier: *Electromagnetic Waves Near Perfect Conductors. I. Multiple Scattering Expansions. Distribution of Modes*, Ann. Phys. (N.Y.) **104**, 300 (1977).
- [11] C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Gräf, A. Heine, T. Papenbrock, A. Richter and C. Richter: *Experimental Test of a Trace Formula for a Chaotic Three-Dimensional Microwave Cavity*, Phys. Rev. Lett. **89**, 064101 (2002).
- [12] E. Bogomolny, R. Dubertrand and C. Schmit: *Trace formula for dielectric cavities: General properties*, Phys. Rev. E **78**, 056202 (2008).
- [13] S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton and R. A. Logan: *Whispering-gallery mode microdisk lasers*, Appl. Phys. Lett. **60**, 289 (1992).
- [14] E. Krioukov, D. J. W. Klunder, A. Driessen, J. Greve and C. Otto: *Sensor based on an integrated optical microcavity*, Opt. Lett. **27**, 512 (2002).
- [15] W. Fang, D. B. Buchholz, R. C. Bailey, J. T. Hupp, R. P. H. Chang and H. Cao: *Detection of chemical species using ultraviolet microdisk lasers*, Appl. Phys. Lett. **85**, 3666 (2004).
- [16] *Optical Microcavities*, Advanced Series in Applied Physics, Hrsg.: K. Vahala (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2004).
- [17] J. U. Nöckel and A. D. Stone: *Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities*, Nature **385**, 45 (1997).

- 
- [18] J. U. Nöckel and R. K. Chang: *2-d Microcavities: Theory and Experiments*, Contribution for Cavity-Enhanced Spectroscopies, edited by Roger D. van Zee and John P. Looney (a volume of Experimental Methods in the Physical Sciences), Academic Press, San Diego, 2002.
- [19] S. Bittner, E. Bogomolny, B. Dietz, M. Miski-Oglu, P. Oria Iriarte, A. Richter and F. Schäfer: *Experimental test of a trace formula for two-dimensional dielectric resonators*, Phys. Rev. E **81**, 066215 (2010).
- [20] T. Fukushima and T. Harayama: *Stadium and quasi-stadium laser diodes*, IEEE Selected Topics in Quantum Electronics **10**, 1039 (2004).
- [21] W. Fang, A. Yamilov and H. Cao: *Analysis of high-quality modes in open chaotic microcavities*, Phys. Rev. A **72**, 023815 (2005).
- [22] M. Lebental, J. S. Lauret, R. Hierle and J. Zyss: *Highly directional stadium-shaped polymer microlasers*, Appl. Phys. Lett. **88**, 031108 (2006).
- [23] M. Lebental, J. S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit and E. Bogomolny: *Directional emission of stadium-shaped microlasers*, Phys. Rev. A **75**, 033806 (2007).
- [24] M. Lebental, N. Djellali, C. Arnaud, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit and E. Bogomolny: *Inferring periodic orbits from spectra of simply shaped microlasers*, Phys. Rev. A **76**, 023830 (2007).
- [25] W. Fang and H. Cao: *Wave interference effect on polymer microstadium laser*, Appl. Phys. Lett. **91**, 041108 (2007).
- [26] S. Shinohara, T. Fukushima and T. Harayama: *Light emission patterns from stadium-shaped semiconductor microcavity lasers*, Phys. Rev. A **77**, 033807 (2008).
- [27] E. Bogomolny, N. Djellali, R. Dubertrand, I. Gozhyk, M. Lebental, C. Schmit, C. Ulysse and J. Zyss: *Trace formula for dielectric cavities. II. Regular, pseudointegrable, and chaotic examples*, Phys. Rev. E **83**, 036208 (2011).
- [28] A. Richter: *Playing Billiard with Microwaves — Quantum Manifestations of Classical Chaos*, in *Emerging Applications of Number Theory*, **109**, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Hrsg.: D. A. Hejhal, J. Friedmann, M. C. Gutzwiller and A. M. Odlyzko (Springer, New York, 1999), pp. 479–523.
- [29] H.-J. Stöckmann: *Quantum Chaos: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [30] S. Bittner: *Mikrowellenexperimente an dielektrischen Kreisbillards*, Diplomarbeit, TU Darmstadt, 2007 (unveröffentlicht).
- [31] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999).
- [32] S. Bittner: *Wave-dynamical properties of dielectric resonators investigated with microwaves*, Dissertation D17, TU Darmstadt, 2010.
- [33] H. Alt, P. von Brentano, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, M. Philipp, H. Rehfeld, A. Richter and P. Schardt: *Precision Test of the Breit-Wigner Formula on Resonances in a Superconducting Microwave Cavity*, Phys. Lett. B **366**, 7 (1996).

- 
- [34] F. Beck, C. Dembowski, A. Heine and A. Richter: *R-matrix theory of driven electromagnetic cavities*, Phys. Rev. E **67**, 066208 (2003).
- [35] M. Brack and R. K. Bhaduri: *Semiclassical Physics* (Westview Press, Oxford, 2003).
- [36] M. Sieber: *The Hyperbola Billiard: A Model for the Semiclassical Quantization of Chaotic Systems*, Dissertation, Universität Hamburg, 1991.
- [37] W. Lin and R. Jensen: *Conjugate points in stadium and circle billiards*, Phys. Rev. E **56**, 5251 (1997).
- [38] F. Schäfer: *Untersuchung der Zeitumkehrinvarianz in Quantenbillards*, Diplomarbeit, TU Darmstadt, 2005 (unveröffentlicht).
- [39] S. Bittner, B. Dietz, M. Miski-Oglu, P. Oria Iriarte, A. Richter and F. Schäfer: *Experimental test of a two-dimensional approximation for dielectric microcavities*, Phys. Rev. A **80**, 023825 (2009).
- [40] E. J. Heller: *Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
- [41] C. Gmachl, E. E. Narimanov, F. Capasso, J. N. Baillargeon and A. Y. Cho: *Kolmogorov-Arnold-Moser transition and laser action on scar modes in semiconductor diode lasers with deformed resonators*, Opt. Lett. **27**, 824 (2002).
- [42] T. Harayama, T. Fukushima, P. Davis, P. O. Vaccaro, T. Miyasaka, T. Nishimura and T. Aida: *Lasing on scar modes in fully chaotic microcavities*, Phys. Rev. E **67**, 015207(R) (2003).
- [43] O. Biham and M. Kvale: *Unstable periodic orbits in the stadium billiard*, Phys. Rev. A **46**, 6334 (1992).
- [44] C. Broyden: *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*, Math. Comp. **19**, 577 (1965).
- [45] J. M. Robbins: *Discrete symmetries in periodic-orbit theory*, Phys. Rev. A **40**, 2128 (1989).
- [46] H. Bruus and N. D. Whelan: *Edge diffraction, trace formulae and the cardioid billiard*, Nonlinearity **9**, 1023 (1996).
- [47] R. Dubertrand: private Mitteilung (unveröffentlicht).
- [48] M. Hentschel and H. Schomerus: *Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators*, Phys. Rev. E **65**, 045603(R) (2002).

---

## Danksagung

---

Zum Abschluss möchte ich einigen Helfern Dank sagen. Allen voran Herrn Professor em. Dr. Dr. h.c. mult. Achim Richter, für die Chance diese Arbeit in seiner Arbeitsgruppe machen zu können.

Danken möchte ich auch den anderen Mitgliedern der Chaos-Gruppe. Diese Arbeit wurde dank Frau Dr. Barbara Dietz, Dr. Stefan Bittner, Dr. Maksim Miski-Oglu in dieser Form erst möglich. Diesen, sowie den weiteren Mitgliedern der Arbeitsgruppe, Tobias Klaus und Christopher Ripp, möchte ich für ihre besondere Hilfsbereitschaft und die stets gute Arbeitsatmosphäre danken.

Mein besonderer Dank gebührt meiner Familie, ganz besonders meinen Eltern. Sie haben mich immer unterstützt und mir das Studium der Physik erst möglich gemacht.



---

# Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 27. Juli 2011

---

(Jochen Isensee)

---