

Versuch 1.2: Hochfrequenzresonatoren

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene
Juni 2012



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut für Kernphysik

1 Einleitung

Für den Betrieb von Beschleunigeranlagen wie z.B. dem S-DALINAC werden Hochfrequenzresonatoren der verschiedensten Formen eingesetzt, um Teilchenpakete zu beschleunigen oder Strahlparameter wie Position und Intensität des Strahls zu bestimmen. Die Kenntnis der Eigenschaften der eingesetzten Resonatoren ist für den Betrieb von großer Bedeutung. In diesem Versuch werden die Eigenschaften eines einfachen Zylinderresonators bestimmt. Von besonderem Interesse sind dabei die unbelastete Güte und der Kopplungsfaktor, welcher sich ändern lässt, indem die Eindringtiefe der Einkoppelantenne variiert wird. Ziel des Versuchs ist es, die Grundlagen der HF-Messtechnik zu erlernen, die verschiedenen Beschreibungsmöglichkeiten von Hochfrequenzresonatoren kennenzulernen und dieses Wissen anzuwenden, um den Kopplungsfaktor für verschiedene Eindringtiefen der Einkoppelantenne zu messen.

2 Vorbereitung

1. Hohlraumresonatoren
 - Maxwell-Gleichungen, Wellengleichung
 - Vektorielle Helmholtzgleichung, Randbedingungen
 - **Moden eines Zylinderresonators**
2. Messung und Beschreibung von Resonatoren
 - 2-Port Netzwerkanalysator
 - **S-Parameter, Streumatrix**
 - Dezibel-Skala
 - **Resonanzkurve in Reflexion und Transmission**
 - **Güten und (Partial-) Breiten**
 - **Kopplungsfaktor und kritische Kopplung**
3. Leitungstheorie
 - Koaxial- und Wellenleiter
 - Ersatzschaltbild für Koaxialkabel, Telegraphengleichung
 - **Impedanz von Netzwerkelementen und Wellenleitern**
 - **Impedanzanpassung und Reflexionskoeffizient**
 - **Smith-Diagramm, S-Parameter vs. Impedanz**
 - Ersatzschaltbild für Resonatoren und Kopplung
4. Resonatoren in der Beschleunigerphysik
 - Einsatzmöglichkeiten von Hohlraumresonatoren
 - (normierte) Shuntimpedanz
 - **Oberflächenwiderstand, Skin-Effekt**
 - **Geometriefaktor**

Literatur

- [1] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [2] PADAMSE, H., J. KNOBLOCH und T. HAYS: *RF Superconductivity for Accelerators*. Wiley-VHC, Weinheim, 2nd Auflage, 2008.
- [3] MAHAUX, C. und H. A. WEIDENMÜLLER: *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions*. North Holland, Amsterdam, 1969.
- [4] DITTES, F.-M.: *The decay of quantum systems with a small number of open channels*. Phys. Rep., 339:215, 2000.
- [5] CASPERS, F.: *RF engineering basic concepts: S-parameters*. CERN Yellow Report, 007, 2011.
- [6] SMITH, P. H.: *Transmission Line Calculator*. Electronics, 17:130, 1944.
- [7] MONTGOMERY, C. G., R. H. DICKE und E. M. PURCELL (Herausgeber): *Principles of Microwave Circuits*. MIT Radiation Laboratory Series. McGraw-Hill, New York, 1948.

3 Grundlagen von Hohlraumresonatoren

Ein Hohlraumresonator ist im einfachsten Fall ein geschlossener Hohlraum aus Metall, der leer ist oder ein Dielektrikum enthalten kann. In diesem Versuch wird ein Zylinderresonator (siehe Abb. 1) benutzt mit einem Radius von $R = 38.55$ mm und einer Höhe von $h = 37$ mm. Aufgrund der Metallwände können sich in einem solchen Resonator stehende elektromagnetische Wellen ausbilden. Diese werden durch die Wellengleichung [1]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (1)$$

beschrieben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist und \vec{E} und \vec{B} das elektrische und magnetische Feld sind. Es wurde hier und im folgenden von einem mit Luft gefüllten Resonator ausgegangen. Mit einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\vec{E}, \vec{B} \propto e^{i\omega t}$ ergibt sich daraus die vektorielle Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = \vec{0}, \quad (2)$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist und $k = \omega/c$ die Wellenzahl. Des Weiteren gelten die Randbedingungen

$$\vec{E}_{\parallel}|_{\partial V} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{B}_{\perp}|_{\partial V} = \vec{0} \quad (3)$$

an den Metallwänden ∂V , d.h., dass an den Metallwänden der zu den Wänden senkrechte Teil des magnetischen Felds und der parallele Anteil des elektrischen Felds verschwindet. Die Helmholtz-Gleichung mit diesen Randbedingungen kann nur für bestimmte, diskrete Werte k_j der Wellenzahl erfüllt werden. Die Lösungen sind die sogenannten Eigenmoden und die dazugehörigen Frequenzen $f_j = ck_j/(2\pi)$ sind die Eigenfrequenzen. Diese und die dazugehörigen Feldverteilungen hängen ausschließlich von der Form des Resonators ab.

Die Helmholtz-Gleichung lässt sich nicht für beliebige Resonatorgeometrien analytisch lösen. Für den Zylinderresonator (siehe Abb. 1) ist dies jedoch möglich. Dabei kann man die zylindrische Geometrie ausnutzen, die ein Abseparieren der z -Abhängigkeit der Felder ermöglicht. Diese wird als $\vec{E}, \vec{B} \propto \sin(k_z z), \cos(k_z z)$ angenommen, wobei k_z die z -Komponente

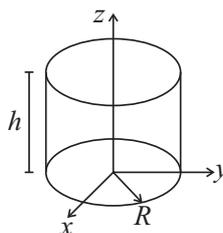


Abbildung 1: Geometrie des Zylinderresonators mit Radius R und Höhe h .

des Wellenvektors \vec{k} ist. Ebenso werden die Felder $\vec{A} \in \{\vec{E}, \vec{B}\}$ in ihren z -Anteil, $A_z \vec{e}_z$, und einen transversalen Anteil $\vec{A}_t = (A_x, A_y, 0)^T$ aufgespalten. Durch Umformung der Maxwell-Gleichungen erhält man [1]

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \frac{1}{k_{\parallel}^2} \vec{\nabla}_t \frac{\partial E_z}{\partial z} - i \frac{\omega}{k_{\parallel}^2} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t B_z \\ \vec{B}_t &= \frac{1}{k_{\parallel}^2} \vec{\nabla}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i \frac{\omega}{c^2 k_{\parallel}^2} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t E_z,\end{aligned}\quad (4)$$

wobei $\vec{\nabla}_t$ analog zu \vec{A}_t definiert ist, und k_{\parallel} mit der Wellenzahl über $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_z^2$ zusammenhängt. Die transversalen Anteile der Felder können somit allein als Funktionen von E_z und B_z geschrieben werden. Es gibt dementsprechend zwei Typen von Moden mit verschiedener Polarisation: zum einen Moden, bei denen B_z vollkommen verschwindet und die daher transversal magnetische (TM) Moden genannt werden, und zum anderen Moden, bei denen E_z verschwindet und die transversal elektrische (TE) Moden genannt werden. Für eine TM-Mode erfüllt dementsprechend E_z die skalare Helmholtzgleichung

$$(\Delta_t + k_{\parallel}^2) E_z(x, y) = 0 \quad \text{mit} \quad E_z|_{\partial V} = 0, \quad (5)$$

d.h. E_z verschwindet am Zylindermantel ∂V des Resonators, und für eine TE-Mode erfüllt B_z

$$(\Delta_t + k_{\parallel}^2) B_z(x, y) = 0 \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0 \quad (6)$$

d.h. die Normalen-Ableitung von B_z am Zylindermantel verschwindet. Für einen Zylinderresonator mit kreisförmigen Querschnitt, wie wir ihn hier betrachten, werden diese Gleichungen in Polarkoordinaten (r, φ) durch $J_m(k_{\parallel} r) f(\varphi)$ gelöst, wobei J_m eine Besselfunktionen 1. Art der Ordnung m ist und $f(\varphi) = \cos(m\varphi)$ oder $\sin(m\varphi)$ ist. Für die vollständigen Felder im Resonator erhält man für eine TM-Mode [2]

$$\begin{aligned}E_z &= E_0 \cos(k_z z) J_m(k_{\parallel} r) f(\varphi) \\ E_r &= -E_0 \frac{k_z}{k_{\parallel}} \sin(k_z z) J'_m(k_{\parallel} r) f(\varphi) \\ E_{\varphi} &= -E_0 \frac{k_z}{r k_{\parallel}} \sin(k_z z) J_m(k_{\parallel} r) \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi) \\ B_r &= -i E_0 \frac{\omega}{r c^2 k_{\parallel}^2} \cos(k_z z) J_m(k_{\parallel} r) \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi) \\ B_{\varphi} &= i E_0 \frac{\omega}{c^2 k_{\parallel}} \cos(k_z z) J'_m(k_{\parallel} r) f(\varphi),\end{aligned}\quad (7)$$

wobei $k_z = p\pi/h$ mit $p = 0, 1, 2, \dots$ ist. Aus der Randbedingung für E_z in Glg. (5) ergibt sich $k_{\parallel} = j_{m,n}/R$ mit der n -ten Nullstelle $j_{m,n}$ der Besselfunktion J_m . Die Eigenmode wird als TM_{mnp} bezeichnet mit der azimuthalen Quantenzahl m , der radialen Quantenzahl n und der axialen Quantenzahl p . Wegen $k = \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2}$ ist ihre Eigenfrequenz

$$f_{mnp}^{\text{TM}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{j_{m,n}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}. \quad (8)$$

Das elektrische Feld E_z für die TM_{010} - und die TM_{120} -Mode ist in Abb. 2 dargestellt. Analog ergibt sich für die Mode TE_{mnp} das Feld

$$B_z = B_0 \sin(k_z z) J_m(k_{\parallel} r) f(\varphi) \quad (9)$$

mit $k_z = p\pi/h$ bei $p = 1, 2, \dots$ und $k_{\parallel} = j'_{m,n}/R$, wobei $j'_{m,n}$ die n -te Nullstelle von J'_m ist. Die Eigenfrequenz ist

$$f_{mnp}^{\text{TE}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{j'_{m,n}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}. \quad (10)$$

Eine Übersicht über einige Nullstellen der Bessel-Funktionen und ihrer Ableitungen ist in Tabelle 1 gegeben. Experimentell können die Eigenfrequenzen eines Resonators mit Hilfe eines Netzwerkanalysators bestimmt werden.

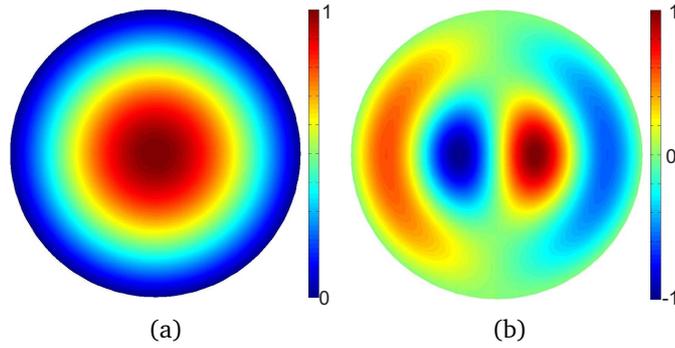


Abbildung 2: Elektrisches Feld E_z für die (a) TM_{010} -Mode und für die (b) TM_{120} -Mode.

Nullstellen von J_m					Nullstellen von J'_m				
n	$j_{0,n}$	$j_{1,n}$	$j_{2,n}$	$j_{3,n}$	n	$j'_{0,n}$	$j'_{1,n}$	$j'_{2,n}$	$j'_{3,n}$
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	1	3.83171	1.84118	3.05424	4.20119
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	2	7.01559	5.33144	6.70613	8.01524
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	3	10.17347	8.53632	9.96947	11.34592

Tabelle 1: Nullstellen der Bessel-Funktionen J_m und ihrer Ableitungen.

4 Experimenteller Aufbau und Messung der S-Parameter

In Abb. 3 sind eine schematische Skizze (Schnitt senkrecht zur z -Achse) und ein Foto des experimentellen Aufbaus dargestellt. Der Zylinderresonator mit einer Höhe von $h = 37.0$ mm und einem Radius von $R = 38.55$ mm ist mit einem Einkoppler und einem Auskoppler versehen. Der Einkoppler ist ein 6 mm dicker und 148 mm langer Metallstab mit einem kleinen Fuss [siehe Abb. 3(c)], der durch eine Öffnung in den Resonator eindringt. Durch die Koppler wird der Resonator somit zu einem offenen System, was notwendig ist, um sein Spektrum zu messen. Mittels eines verstellbaren Balgs kann die Eindringtiefe des Metallstabs in den Resonator variiert werden. Die Eindringtiefe L_{ein} des Metallstabs in den Resonator ergibt sich aus der Höhe L_A des Aufbaus auf dem Resonator [siehe Abb. 3(a)], der Länge $L_S = 137,2 \pm 0,1$ mm, die der Metallstab über den Flansch des Anschlusses hinausragt [siehe Abb. 3(c)], und der Dicke $b = 23,95$ mm der Resonatorwand zu

$$L_{\text{ein}} = L_S - L_A - b = 113,25 \text{ mm} - L_A. \quad (11)$$

Oben am Einkoppler befindet sich ein Anschluss (auch Port genannt) für ein koaxiales Hochfrequenz- (HF) Kabel. Auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich der Auskoppler, eine gebogene Drahtantenne. Außerdem befinden sich im Boden und im Deckel des Zylinders Öffnungen zum Anschluss an das Strahlrohr eines Beschleunigers. Mittels einer dieser Öffnungen ist der Resonator an eine Vakuumpumpe angeschlossen. Die Anschlüsse von Ein- und Auskoppler werden mit koaxialen HF Kabeln an einen vektoriiellen Netzwerkanalysator (VNA, Typ M52036A von Anritsu, im Bild nicht zu sehen) angeschlossen.

Der VNA hat zwei Ein- bzw. Ausgänge (im folgenden Ports genannt), mit welchen er Hochfrequenzsignale aussenden und empfangen kann, um Hochfrequenzbauteile und -resonatoren zu vermessen. Die beiden Ports werden mit Koaxialkabeln an das zu untersuchende Bauteil (DUT, device under test) angeschlossen. Der VNA sendet nun von einem Port elektromagnetische Wellen fester Frequenz (im Mikrowellenbereich) aus und misst, welcher Anteil dieser Wellen zum selben Port reflektiert und welcher zum anderen Port transmittiert wird. Es sei a_i die Amplitude der am Port i des DUT einlaufenden Welle und b_j die der am Port j auslaufenden Welle (siehe Abb. 4). Der VNA misst das Verhältnis

$$S_{ji}(f) = \frac{b_j}{a_i} \quad (12)$$

in Abhängigkeit der Frequenz f . Man nennt die Größen S_{ji} S-Parameter. Sie sind komplex, da auch die Phasenverschiebung zwischen aus- und einlaufendem Signal gemessen wird. Für ein DUT mit zwei Ports ergeben die verschiedenen S-Parameter zusammen die 2×2 -dimensionale S-Matrix

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } \vec{b} = S\vec{a}. \quad (13)$$

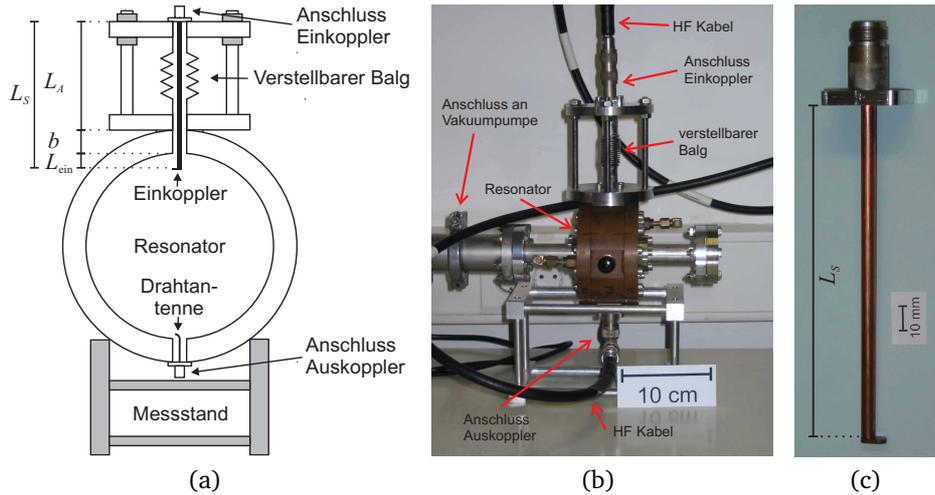


Abbildung 3: (a) Schnitt durch den Resonator, (b) Foto des experimentellen Aufbaus und (c) Foto des Einkopplers.



Abbildung 4: Darstellung eines HF-Bauteils (DUT) mit zwei Ports und jeweils ein- und auslaufenden Wellen mit Amplituden a_i bzw. b_i .

Für den allgemeinen Fall eines DUT mit M Ports ist S eine komplexe $M \times M$ -Matrix. Bei Matrixelementen mit $i = j$ spricht man von Reflexions-, bei jenen mit $i \neq j$ von Transmissions-Matrixelementen. Ein lineares HF-Bauteil ist durch seine S -Matrix $S(f)$ vollständig charakterisiert. Die Einheit der Amplituden a_i, b_i ist $[a_i] = [b_i] = 1\sqrt{\text{Watt}}$, und

$$|S_{ji}|^2 = \frac{P_{j,\text{aus}}}{P_{i,\text{ein}}} \quad (14)$$

ist das Verhältnis der an Port j aus dem DUT ausgekoppelten Leistung $P_{j,\text{aus}}$ zu der an Port i eingekoppelten Leistung $P_{i,\text{ein}}$. Die Amplituden a_i bzw. b_i sind proportional zu den Amplituden einer an Port i ein- bzw. auslaufenden Spannungswelle (siehe Abschnitt 6.2.).

5 Modellierung der S -Matrix

Die S -Matrix eines Resonators lässt sich mit Hilfe einer Streutheorie beschreiben, wie sie z.B. auch zur Beschreibung von Compound-Kern-Reaktionen verwendet wird [3, 4]. Dabei werden die Eigenmoden des Resonators, die propagierenden Moden in den angeschlossenen Kabeln (auch Streukanäle genannt) und die Kopplung zwischen diesen betrachtet. Es sei $|i, f\rangle$ die im Kabel an Port i einlaufende (d.h. in richtung des Resonators laufende) Welle mit Frequenz f und $\langle j, f|$ die auslaufende Welle im Kabel an Port j . Das entsprechende Streumatrix-Element $S_{ji}(f) = \langle j, f|S|i, f\rangle$ ist gerade die Übergangsamplitude zwischen den beiden Moden. Die Streumatrix kann in der Form [4]

$$S(f) = \mathbb{1} + iW^T \left(f\mathbb{1} - H - \frac{i}{2}WW^T \right)^{-1} W \quad (15)$$

dargestellt werden. Hierbei ist H der Hamilton-Operator des geschlossenen Resonators (entspricht dem Laplace-Operator aus Glg. (2) mit den entsprechenden Randbedingungen) mit den Eigenmoden $|n\rangle$, also z.B. den Feldern aus Glg. (7), und den Eigenfrequenzen f_n wie z.B. in Glg. (8), d.h. $H|n\rangle = f_n|n\rangle$. Der Operator W beschreibt die Kopplung zwischen den Streukanälen, das sind die ein- und auslaufenden Wellen in den angeschlossenen Kabeln, und den Eigenmoden des Resonators, d.h.

$$W_{ni} = \langle n|W|i, f\rangle \quad (16)$$

ist proportional zur Übergangsamplitude zwischen einer einlaufenden Welle im Streukanal i und der Eigenmode $|n\rangle$ des Resonators. Konkret hängt W_{ni} von der Position und Geometrie des Kopplers an Port i und der Feldverteilung der Eigenmode n ab. Die Matrixelemente von W lassen sich bis auf Ausnahmefälle nur numerisch berechnen und werden daher meist aus experimentellen Daten bestimmt. Ihre Einheit ist $[W_{ni}] = 1\sqrt{\text{Hz}}$.

In einem realen Resonator aus Metall mit endlicher Leitfähigkeit wird Energie nicht nur durch die Koppler und die angeschlossenen Streukanäle ausgekoppelt, sondern geht auch durch Ohm'sche Verluste in den Wänden verloren. Diese Verluste lassen sich durch einen oder mehrere zusätzliche, parasitäre Zerfallskanäle modellieren. Die S -Matrixelemente für diese zusätzlichen Kanäle lassen sich jedoch nicht messen, und experimentell ist somit nur der Teil der S -Matrix zugänglich, der den Kanälen für die angeschlossenen Kabel entspricht.

In der Praxis werden nur eine endliche Zahl N an Eigenmoden und M an Streukanälen betrachtet¹. Dann ist H eine hermitesche $N \times N$ -Matrix, W eine $N \times M$ -Matrix und S eine $M \times M$ -Matrix. Die Matrix $H_{\text{eff}} = H + iWW^T/2$ wird als effektiver Hamilton-Operator bezeichnet und ist im Gegensatz zu H nicht hermitesch. Daher hat sie komplexe Eigenwerte, deren Realteil die Resonanzfrequenz und deren Imaginärteil die Zerfallsrate der Moden im Resonator angibt. Durch die Öffnung des Resonators durch die Koppler werden aus den Eigenmoden des geschlossenen Resonators Resonanzen mit endlicher Lebensdauer. Der Operator $(f\mathbb{1} - H_{\text{eff}})^{-1}$ wird auch als Propagator des Resonators bezeichnet. Das S -Matrixelement

$$S_{ji}(f) = \delta_{ji} + i\langle j, f | W^T (f\mathbb{1} - H_{\text{eff}})^{-1} W | i, f \rangle \quad (17)$$

läßt sich dann wie folgt verstehen (von rechts nach links gelesen): Die einlaufende Welle $|i, f\rangle$ wird zum Teil in den Resonator eingekoppelt (W), durchläuft diesen $[(f\mathbb{1} - H_{\text{eff}})^{-1}]$ und wird zum Teil wieder ausgekoppelt (W^T) in die auslaufende Welle $\langle j, f |$.

Wir wollen nun zunächst den einfachsten Fall betrachten, nämlich den einer einzelnen Eigenmode ($N = 1$) die an nur einen Port / Streukanal (Index $i = 1$) sowie an einen parasitären Kanal koppelt ($M = 1 + 1$). Dies ist eine sinnvolle Näherung, wenn man nur eine einzelne, isolierte Resonanz des Hohlraumresonators betrachten will. In diesem Fall ist $H = (f_0)$, wobei f_0 die Eigenfrequenz der Eigenmode ist, und $W = (\sqrt{\Gamma_1}, \sqrt{\Gamma_\Omega})$. Als Streumatrixelement ergibt sich

$$S_{11}(f) = 1 + i \frac{\Gamma_1}{f - f_0 - i\Gamma/2}, \quad (18)$$

wobei Γ_1 die Partialbreite des Streukanals, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_\Omega$ die Gesamtbreite der Resonanz und Γ_Ω die Partialbreite des parasitären Kanals ist, also den Ohm'schen Verlusten entspricht. Die (Partial-) Breiten haben die Einheit $[\Gamma] = 1 \text{ Hz}$. Der effektive Hamilton-Operator hat den Eigenwert $\mathcal{F} = f_0 + i\Gamma/2$ und die Feldamplitude im Resonator ein Zeitverhalten $\vec{E} \propto \exp(2\pi i \mathcal{F} t) = \exp(2\pi i f_0 t - 2\pi \Gamma t/2)$. Die im Resonator gespeicherte Energie E_{res} nimmt daher mit $E_{\text{res}} \propto \exp(-2\pi \Gamma t)$ exponentiell ab. Als dimensionsloses Maß für die Lebensdauer einer Resonanz wird die Güte verwendet, welche definiert ist als das Verhältnis der gespeicherten Energie E_{res} zur dissipierten Leistung P_{dis} pro Schwingungszyklus T_0 ,

$$Q = \frac{2\pi E_{\text{res}}}{T_0 P_{\text{dis}}} = \omega_0 \frac{E_{\text{res}}}{P_{\text{dis}}} \quad (19)$$

mit $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$. Hierbei umfasst P_{dis} sowohl die durch Ohm'sche Verluste dissipierte Leistung als auch die durch den Koppler ausgekoppelte Leistung. Man spricht auch von belasteter Güte, weil die Kopplung an eine externe Last zu zusätzlichen Verlusten im Resonator führt. Sie ergibt sich zu

$$Q = \frac{f_0}{\Gamma}. \quad (20)$$

Die unbelastete Güte ist definiert als das Verhältnis der gespeicherten Energie zur Ohm'schen Verlustleistung P_Ω allein,

$$Q_0 = \omega \frac{E_{\text{res}}}{P_\Omega} = \frac{f_0}{\Gamma_\Omega}. \quad (21)$$

Analog definiert man die sogenannte externe Güte als $Q_{\text{ext}} = f_0/\Gamma_1$, und es gilt

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}}. \quad (22)$$

Die Resonanzkurve, wie sie üblicherweise am VNA dargestellt wird, ist das Betragsquadrat von S_{11} nach Glg. (18),

¹ M ist die Gesamtzahl der propagierenden Moden in den angeschlossenen Kabeln oder Wellenleitern, wobei je nach Frequenz auch mehrere verschiedene Moden in den Wellenleitern existieren können. Im hier betrachteten Fall gibt es nur jeweils eine propagierende Mode, weshalb M identisch mit der Anzahl der Ports am Resonator ist. Es kommen dann ggf. noch parasitäre Kanäle dazu.

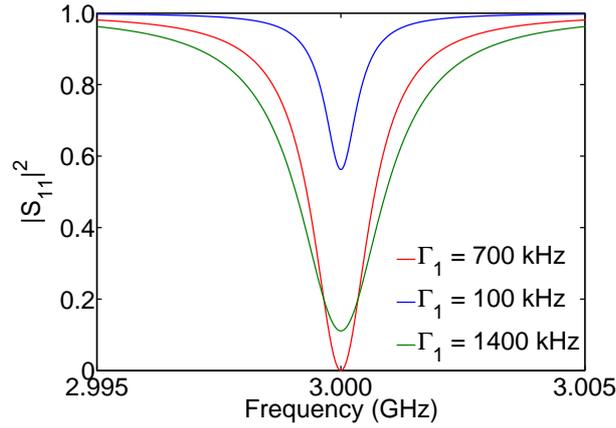


Abbildung 5: Resonanzkurve in Reflexion berechnet für $f_0 = 3$ GHz, $\Gamma_\Omega = 700$ kHz und $\Gamma_1 = 100$ kHz (blau, $\beta = 0.14$), $\Gamma_1 = 700$ kHz (rot, $\beta = 1$) und $\Gamma_1 = 1400$ kHz (grün, $\beta = 2$).

$$|S_{11}(f)|^2 = \frac{(f - f_0)^2 + (\Gamma_\Omega - \Gamma_1)^2/4}{(f - f_0)^2 + (\Gamma_\Omega + \Gamma_1)^2/4}. \quad (23)$$

Die Resonanzkurven sind in Abb. 5 für drei verschiedene Fälle dargestellt. Die verwendeten Parameter sind $f_0 = 3$ GHz, $\Gamma_\Omega = 700$ kHz und $\Gamma_1 = 100$ kHz (blau), $\Gamma_1 = 700$ kHz (rot) und $\Gamma_1 = 1400$ kHz (grün). Die Resonanz bei f_0 macht sich als ein Minimum in der reflektierten Leistung bemerkbar, d.h. nur ein Teil $|S_{11}|^2$ der eingestrahlenen Leistung wird reflektiert, während der Anteil $1 - |S_{11}|^2$ im Resonator verbleibt. Abseits der Resonanz dagegen wird die gesamte Leistung reflektiert, da sich eine Welle der entsprechenden Frequenz im Resonator nicht ausbreiten kann. Dies ist von besonderem Interesse, da beim Einsatz eines Resonators in der Beschleunigerphysik möglichst viel Leistung in den Resonator gekoppelt werden soll, um dort z.B. den Teilchenstrahl zu beschleunigen. Die reflektierte Leistung bei der Resonanzfrequenz ist

$$|S_{11}(f_0)|^2 = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_\Omega)^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_\Omega)^2} = \left| \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right|^2. \quad (24)$$

Hier wurde der sogenannte Kopplungsfaktor

$$\beta = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_\Omega} = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} \quad (25)$$

eingeführt. Im optimalen Fall geht alle Leistung in den Resonator. In diesem Fall ist $\beta = 1$, also $\Gamma_1 = \Gamma_\Omega$, und man spricht von kritischer Kopplung. Die belastete Güte ist dann gerade $Q = Q_0/2$. Hingegen wird sowohl für unterkritische ($\beta < 1$) als auch überkritische Kopplung ($\beta > 1$) ein Teil der Leistung am Resonator reflektiert und somit nicht genutzt. Je weiter β von 1 entfernt ist, umso größer ist der Anteil der reflektierten Leistung. Die belastete Güte ist dann $Q = Q_0/(1 + \beta)$. Da die Größe der Ohm'schen Verluste, also Γ_Ω , von Material und Beschaffenheit der Resonatorwände abhängt, kann man den Kopplungsfaktor am besten über die Geometrie bzw. Eindringtiefe des Kopplers einstellen, was eine Aufgabenstellung in diesem Versuch ist.

Zum Schluss sei noch kurz auf den Fall eines Resonators mit M Kopplern eingegangen. Wie auch bei dem hier untersuchten Resonator braucht man oft noch einen oder mehrere weitere (Aus-) Koppler, z.B. für Diagnosezwecke. Analog zum obigen Fall setzen wir $W = (\sqrt{\Gamma_1}, \dots, \sqrt{\Gamma_M}, \sqrt{\Gamma_\Omega})$ mit den Partialbreiten Γ_i der einzelnen Kanäle und erhalten

$$S_{ji}(f) = \delta_{ji} + i \frac{\sqrt{\Gamma_j \Gamma_i}}{f - f_0 - i\Gamma/2} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^M \Gamma_i + \Gamma_\Omega. \quad (26)$$

Dies ist die allgemeine Breit-Wigner-Kurve für eine isolierte Resonanz. Analog zum 1-Kanal-Fall definiert man den Kopplungsfaktor und die externe Güte für jeden Kanal als $\beta_i = \Gamma_i/\Gamma_\Omega$ und $Q_{\text{ext},i} = f_0/\Gamma_i$ und erhält

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{Q_{\text{ext},i}}. \quad (27)$$

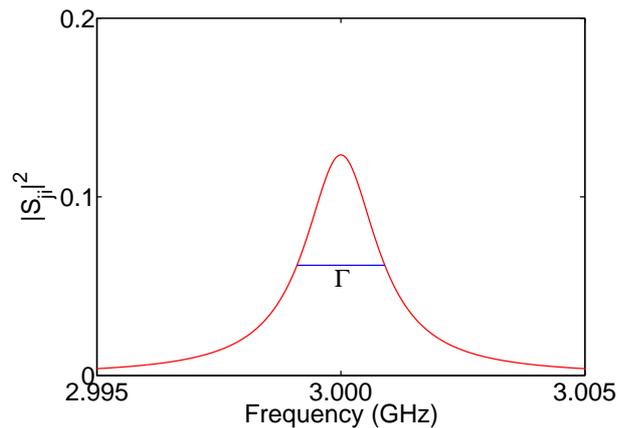


Abbildung 6: Resonanzkurve in Transmission berechnet für $f_0 = 3$ GHz, $\Gamma_\Omega = 700$ kHz und $\Gamma_1 = 1000$ kHz und $\Gamma_2 = 100$ kHz. Die blaue Linie zeigt die Halbwertsbreite Γ an.

Die Resonanzkurve $|S_{ii}|^2$ in Reflexion ist identische mit Glg. (23), wenn man Γ_Ω durch $\Gamma - \Gamma_i$ ersetzt. Die Resonanzkurve in Transmission (also für $i \neq j$) ist

$$|S_{ji}(f)|^2 = \frac{\Gamma_j \Gamma_i}{(f - f_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (28)$$

und wird auch Lorentz-Kurve genannt. Aus ihr kann man die Gesamtbreite Γ ablesen, da sie gerade die Halbwertsbreite der Lorentzkurve ist, d.h. der Frequenzabstand zwischen den beiden Punkten, bei denen die $|S_{ji}|^2$ auf die Hälfte des Maximums abgefallen ist. Ein Beispiel für eine Lorentzkurve ist in Abb. 6 gezeigt.

6 Resonatoren als Schaltkreiselemente

Die in den Abschnitten 3 und 5 eingeführte Behandlung von Resonatoren im Rahmen der Wellendynamik erlaubt im Prinzip eine vollständige Beschreibung von Hochfrequenzresonatoren und ihrem Verhalten. Für viele Zwecke ist es jedoch günstiger, den Resonator als Bauelement in einem Schaltkreis zu betrachten, dass durch eine bestimmte (frequenzabhängige) Impedanz charakterisiert ist und in Form eines sogenannten Ersatzschaltbilds eingefügt werden kann. Dies ist z.B. für Konzeption und Verständnis von Regelungskreisläufen wichtig. Auf die notwendigen Grundbegriffe wird im Folgenden eingegangen.

6.1 Impedanz von einfachen Bauteilen

Die Impedanz Z (auch Wechselstromwiderstand genannt) eines Bauteils ist das Verhältnis

$$Z = U/I \quad (29)$$

von Spannung U und Strom I am Bauteil. Die Impedanz hängt im Allgemeinen von der (Kreis-) Frequenz ω der betrachteten Wechselspannungen und -ströme ab, und sie ist komplex, da sie sowohl das Verhältnis der Beträge als auch die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung angibt. Ihren Realteil nennt man auch Resistanz und ihren Imaginärteil Reaktanz. Für einen Ohm'schen Widerstand R ist $Z = R$, für einen idealen Kondensator (Kapazität C) ist sie $Z = 1/(i\omega C)$ und für eine ideale Spule (Induktivität L) ist sie $Z = i\omega L$. Die Impedanz von komplexen Schaltkreisen ergibt sich wie üblich aus den Impedanzen der einzelnen Bauteile gemäß den Kirchhoff'schen Gesetzen.

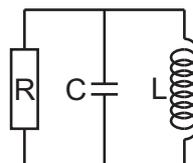


Abbildung 7: Schaltbild eines einfachen RLC-Schwingkreises aus einem parallel geschalteten Widerstand R , einer Kapazität C und einer Induktivität L .

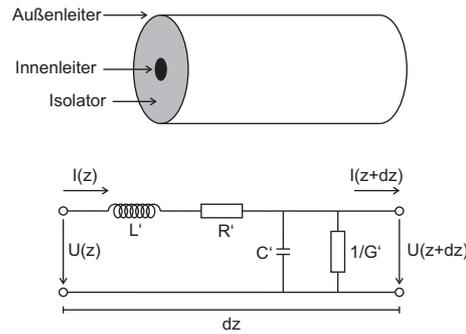


Abbildung 8: Oben: Skizze eines Koaxialkabels mit Außen- und Innenleiter sowie Isolator. Unten: Ersatzschaltbild mit Induktivität L' , Kapazität C' , Widerstand R' und Leitfähigkeit G' pro Länge. Die obere bzw. untere Klemme des Ersatzschaltbilds entsprechen Außen- und Innenleiter des Kabels.

Ein einfaches Ersatzschaltbild für einen (geschlossenen) Resonator ist in Abb. 7 gezeigt. Es besteht aus der Parallelschaltung eines Widerstands R , einer Kapazität C und einer Induktivität L (ein sogenannter RLC-Schwingkreis). Strom und Spannung in diesem Kreis schwingen mit $\exp(i\omega_0 t - \tilde{\Gamma}_\Omega t/2)$, wobei $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ die Kreisfrequenz und $\tilde{\Gamma}_\Omega = 1/(RC)$ die Dämpfungskonstante aufgrund der Ohm'schen Verluste im Widerstand ist². Die Impedanz dieser Parallelschaltung ist

$$Z_{\text{res}} = \left(\frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right)^{-1}. \quad (30)$$

Der Schwingkreis aus Abb. 7 entspricht einem geschlossenen Resonator mit Ohm'schen Verlusten, aber ohne Kopplung an die Außenwelt. Im Resonanzfall, also für $\omega = \omega_0$, wird seine Impedanz rein reell ($Z_{\text{res}} = R$). Für eine realistische Beschreibung eines Hohlraumresonators muss noch ein Koppler und ein Wellenleiter / Koaxialkabel zum Anschluss an einen Hochfrequenzgenerator hinzugefügt werden. Auf die Grundlagen zur Beschreibung von Wellenleitern wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

6.2 Impedanz von Wellenleitern

Analog zur Impedanz eines Bauteils kann man auch die Impedanz eines Wellenleiters oder Koaxialkabels definieren als das Verhältnis U/I einer Spannungs- und einer Stromwelle im Wellenleiter. Dies wird im Folgenden am Beispiel eines Koaxialkabels ausgeführt. Eine Skizze eines Koaxialkabels und eines entsprechenden Ersatzschaltbilds ist in Abb. 8 zu sehen. Dieses Ersatzschaltbild beschreibt ein infinitesimales Stück Koaxialkabel der Länge dz , und die Größen L' , C' , R' und G' sind als Induktivität, Kapazität, Widerstand des Koaxialkabels sowie Leitfähigkeit des Isolators pro Längeneinheit zu verstehen. Die Induktivität L' und Kapazität C' pro Längeneinheit eines Koaxialkabels lassen sich leicht berechnen. Hinzu kommen der Widerstand R' aufgrund Ohm'scher Verluste im Innen- und im Außenleiter sowie ein Leckstrom durch den Isolator mit Leitfähigkeit G' . Die Klemmen des Schaltbilds lassen sich mit dem Außen- und dem Innenleiter des Koaxialkabels identifizieren, wir betrachten also die Spannung $U(z, t)$, die am Ort z zur Zeit t zwischen Innen- und Außenleiter abfällt, und den Strom $I(z, t)$, der auf der Oberfläche von Innen- und Außenleiter fließt. Mit den Kirchhoff'schen Regeln und den Gesetzen für Strom und Spannung an Induktivitäten und Kapazitäten kann man die sogenannte Telegraphengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -\left(R'I + L'\frac{\partial I}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\left(G'U + C'\frac{\partial U}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

ableiten. Wir wollen im Folgenden der Einfachheit halber den verlustfreien Fall ($R' = G' = 0$) betrachten. Für eine einlaufende Welle (d.h. in positive z -Richtung) mit dem Ansatz

$$U_{\text{ein}} = U_0^{\text{ein}} e^{i(\omega t - kz)} \quad I_{\text{ein}} = I_0^{\text{ein}} e^{i(\omega t - kz)} \quad (32)$$

ergibt sich die Phasengeschwindigkeit der Welle als

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (33)$$

² Tatsächlich ist die Eigenfrequenz aufgrund der Dämpfung verringert zu $\omega = \sqrt{\omega^2 - \tilde{\Gamma}_\Omega^2/4}$. Im Folgenden wollen wir aber nur den hier relevanten Fall $\tilde{\Gamma}_\Omega \ll \omega_0$ betrachten.

und das Verhältnis von Spannungs- und Stromamplituden U_0^{ein} und I_0^{ein} als

$$\frac{U_0^{\text{ein}}}{I_0^{\text{ein}}} = \sqrt{L'/C'} = Z_0. \quad (34)$$

Die Größe Z_0 bezeichnet man als charakteristische Impedanz eines Kabels oder Wellenleiters. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Impedanz als Verhältnis $Z(z) = U(z)/I(z)$ von Spannung und Strom am Ort z im Kabel, da i.A. hin- und rücklaufende Wellen miteinander interferieren. Die Impedanz hängt daher von der Position z ab, der sogenannten Referenzebene, welche im nächsten Abschnitt näher erläutert wird.

Für eine rücklaufende Welle $U_{\text{rück}}, I_{\text{rück}} \propto e^{i(\omega t + kz)}$ erhält man dieselbe Phasengeschwindigkeit, aber $U_0^{\text{rück}}/I_0^{\text{rück}} = -Z_0$. Für den allgemeinen Fall einer ein- und auslaufenden Welle betragen Gesamtspannung und -strom also

$$\begin{aligned} U &= (U_0^{\text{ein}} e^{-ikz} + U_0^{\text{rück}} e^{ikz}) e^{i\omega t} = U_{\text{ein}} + U_{\text{rück}} \\ I &= \left(\frac{U_0^{\text{ein}}}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{U_0^{\text{rück}}}{Z_0} e^{ikz} \right) e^{i\omega t} = I_{\text{ein}} - I_{\text{rück}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Der Anschluß an das Koaxialkabel bestehend aus Innen- und Außenleiter ist das, was in Abschnitt 4 als Port bezeichnet wurde. Die Amplituden a und b der ein- und rücklaufenden Wellen³ an diesem Port sind als $a = U_0^{\text{ein}}/\sqrt{Z_0}$ und $b = U_0^{\text{rück}}/\sqrt{Z_0}$ definiert. Der Faktor $\sqrt{Z_0}$ wurde eingeführt, um die richtige Dimension von a und b zu gewährleisten. Im Prinzip kann Z_0 beliebig gewählt werden, aber üblicherweise verwendet man die charakteristische Impedanz des betreffenden Kabels. Aus Glg. (35) ergeben sich die Zusammenhänge

$$a = \frac{U + Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \quad b = \frac{U - Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \quad (36)$$

bzw.

$$U = \sqrt{Z_0}(a + b) \quad I = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a - b) \quad (37)$$

zwischen den Amplituden a und b von ein- und rücklaufender Welle und der Gesamtspannung U und dem Gesamtstrom I an einem Port [5].

6.3 Impedanzübergänge und -anpassung

Was passiert nun, wenn ich an einen Wellenleiter (oder den Port eines VNA) mit charakteristischer Impedanz Z_0 ein Bauteil mit Impedanz Z_a an der Position $z = 0$ anschließe? Spannung und Strom im Kabel kann man allgemein schreiben als

$$U(z) = \sqrt{Z_0}(a e^{-ikz} + b e^{ikz}) \quad \text{und} \quad I(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a e^{-ikz} - b e^{ikz}). \quad (38)$$

Am Bauteil muss nun $U(z=0)/I(z=0) = Z_a$ gelten, wodurch das Verhältnis von a und b bestimmt wird zu

$$S_{11} = \frac{b}{a} = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}. \quad (39)$$

Ein Impedanzsprung in einer Schaltung führt also ähnlich wie in der Optik der Übergang zwischen zwei Medien mit verschiedenem Brechungsindex zu einer teilweisen Reflexion des Signals, welche im Allgemeinen unerwünscht ist. Daher versucht man in der Regel, die Impedanz hintereinandergeschalteter Bauteile aneinander anzupassen (sogenannte Impedanzanpassung). Der Zusammenhang Glg. (39) zwischen der Impedanz Z_a eines Bauteils und der Reflexion S_{11} an diesem erlaubt auch die Messung von Impedanzen mit einem VNA. Dabei ist Z_0 die Impedanz des Ports des VNA bzw. der angeschlossenen Kabel, welche typischerweise $Z_0 = 50 \Omega$ beträgt.

Gleichung (39) definiert eine konforme Abbildung zwischen den komplexen Größen S_{11} und Z_a/Z_0 . Dies wird bei der Darstellung in einem sogenannten Smith-Diagramm ausgenutzt [6]. In diesem Diagramm wird einfach der Imaginärteil von S_{11} gegen den Realteil aufgetragen. Ein Beispiel ist in Abb. 9 (rechts) dargestellt. Die Linien konstanter Resistanz $r = \text{Re}(Z/Z_0)$ und Reaktanz $x = \text{Im}(Z/Z_0)$ bilden in diesem Diagramm Kreise bzw. Kreisbögen. Diese sind als schwarze (Resistenz) und blaue (Reaktanz) Kurven eingezeichnet, sodass die Impedanz Z_A aus der gemessenen Reflexion S_{11} mit Hilfe des Smith-Diagramms abgelesen werden kann. Die blauen Kurven in der oberen Hälfte entsprechen dabei einer

³ Der Index i des Ports wird hier zur Vereinfachung unterdrückt.

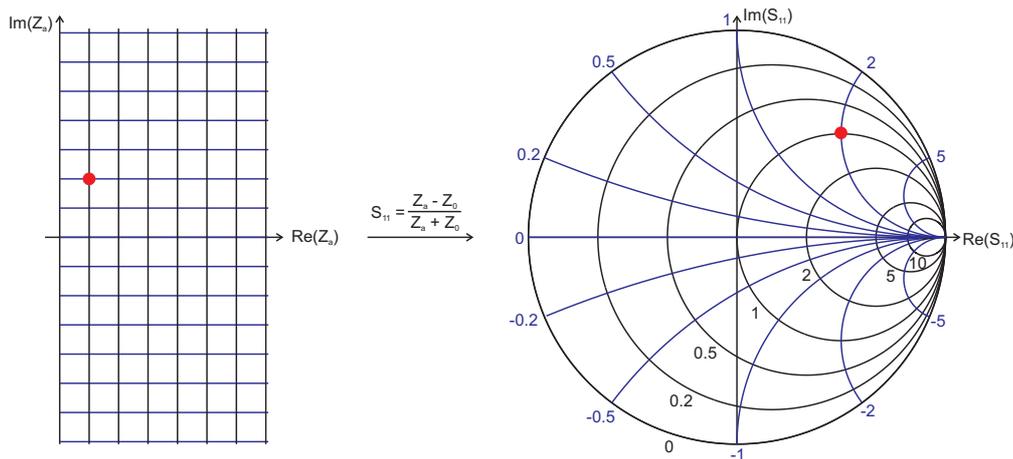


Abbildung 9: Beispiel eines Smith-Diagramms (rechts). Man erhält es als konforme Abbildung der komplexen Impedanzebene (links). Die schwarzen Kreise sind Kurven konstanter Resistanz, die entsprechenden Werte von r sind angegeben. Die blauen Kreisbögen sind Kurven konstanter Reaktanz, die entsprechenden Werte von x sind angegeben. Der rote Punkt entspricht somit einer Impedanz von $Z = (1 + 2i)Z_0$.

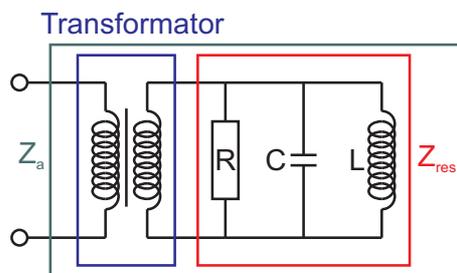


Abbildung 10: Kopplung eines RLC-Schwingkreises mittels eines Transformators an einen Schaltkreis. Durch den Transformator wird die Impedanz Z_{res} des Schwingkreises auf die Impedanz Z_a transformiert.

Induktivität ($x > 0$), die in der unteren Hälfte einer Kapazität ($x < 0$). Der rote Punkt z.B. entspricht der Impedanz $Z_A = (1 + 2i)Z_0$. Es können beliebig große oder kleine Werte von Z_a/Z_0 innerhalb des Einheitskreises dargestellt werden, da immer $|S_{11}| \leq 1$ ist. Das Smith-Diagramm ist bei der Analyse von Schaltungen sehr nützlich, da man mit verschiedenen graphischen Methoden direkt bestimmen kann, wie sich die Impedanz durch Parallel- oder Reihenschaltung anderer Bauteile ändert und z.B. auf Z_0 anpassen lässt. Letzteres entspricht dem Einstellen der kritischen Kopplung im Praktikumsversuch. Wenn man z.B. einen Widerstand in Reihe hinzu schaltet, bewegt sich der Punkt entlang einer Linie konstanter Reaktanz, und man kann die geänderte Impedanz durch den Schnittpunkt mit dem Kreis konstanter Resistanz für den neuen Wert von r bestimmen.

6.4 Impedanzanpassung bzw. kritische Kopplung des Resonators

Die Eigenschaften eines Hohlraumresonators lassen sich wie oben gezeigt z.B. durch einen RLC-Schwingkreis modellieren. Dieser muss an die Außenwelt gekoppelt werden. Der Koppler lässt sich in einem Schaltkreis z.B. durch zwei gekoppelte Induktivitäten, d.h. einen Transformator, modellieren [2]. Dies ist in Abb. 10 dargestellt. Ein idealer Transformator mit Übersetzungsverhältnis γ transformiert eine Impedanz Z_2 auf der Sekundärseite auf eine Impedanz $Z_1 = \gamma^2 Z_2$ auf der Primärseite⁴. Im Experiment misst man also nicht die Impedanz Z_{res} des Resonators selbst, sondern nur die durch den Koppler transformierte Impedanz $Z_a = \gamma^2 Z_{\text{res}}$. Die Veränderung der Eindringtiefe des Kopplers in den Resonator entspricht also dem Einstellen des Übersetzungsverhältnisses γ mit dem Ziel, Z_a an Z_0 anzupassen, d.h. die kritische Kopplung einzustellen. Bei kritischer Kopplung geht die Resonanzkurve $S_{11}(f)$ im Smith-Diagramm durch den Ursprung.

⁴ Das Übersetzungsverhältnis eines Transformators ist gerade das Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen.

Die Reflexionskurve, die man erhält, wenn man den Resonator mit einem Koppler an den VNA mit Impedanz Z_0 anschließt, lässt sich nun aus dem Ersatzschaltbild berechnen. Einsetzen von $Z_a = [1/R + i\omega C + 1/(i\omega L)]^{-1}$ [vgl. Glg. (30)] in Glg. (39) ergibt

$$S_{11}(f) = \frac{\beta - [1 + 2iQ_0(f - f_0)/f_0]}{\beta + [1 + 2iQ_0(f - f_0)/f_0]} \quad (40)$$

Hierbei wurde die Näherung $|f - f_0| \ll f_0$ gemacht und der Kopplungsfaktor $\beta = R/Z_0$ sowie die unbelastete Güte $Q_0 = \omega_0/\tilde{\Gamma}_\Omega = f_0/\Gamma_\Omega$ eingesetzt. Gleichung (40) ist (bis auf ein Vorzeichen) identisch mit Glg. (18). Bei der Resonanzfrequenz f_0 wird $Z_a = R$, und wie in Abschnitt 5 erwähnt gilt

$$|S_{11}(f_0)|^2 = \left| \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right|^2 \quad (41)$$

Für unterkritische Kopplung erhält man

$$\beta = \frac{1 - |S_{11}(f_0)|}{1 + |S_{11}(f_0)|} \quad (42)$$

und für überkritische Kopplung

$$\beta = \frac{1 + |S_{11}(f_0)|}{1 - |S_{11}(f_0)|} \quad (43)$$

Ob über- oder unterkritische Kopplung vorliegt, lässt sich alleine aus $|S_{11}(f_0)|$ nicht ablesen. Dies kann aus der Phase von S_{11} abgelesen werden, wozu sich das Smith-Diagramm gut eignet. Obige Zusammenhänge zwischen $|S_{11}|$ und β sind nur gültig, wenn lediglich ein Koppler angeschlossen ist bzw. wenn die Partialbreite des anderen Kopplers vernachlässigbar ist, wie aus Glg. (26) ersichtlich wird.

6.5 Änderung der Referenzebene

Gleichung (39) und damit auch Glg. (40) sind nur gültig, wenn man S_{11} direkt vor dem Bauteil mit Impedanz Z_a misst. Der Ort, an dem man misst, wird auch als Referenzebene bezeichnet. Diese liegt normalerweise direkt am Port des VNA. In der Praxis befindet sich beim messen eines Bauteils ein Kabel der Länge l zwischen Bauteil und Port des VNA. Betrachtet man nun Glg. (35) bei $z = -l$ und benutzt Glg. (39) für $S_{11}(z = 0)$ so erhält man

$$S_{11}(z = -l) = \frac{U_{\text{rück}}(z = -l)}{U_{\text{ein}}(z = -l)} = e^{-2ikl} S_{11}(z = 0) = e^{-2ikl} \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} \quad (44)$$

Wenn man an ein Bauteil ein Kabel der Länge l anfügt bzw. die Referenzebene um die Länge l vom Bauteil wegbewegt, so entspricht dies also im Smith-Diagramm einer Rotation um den Winkel $2kl$ im Uhrzeigersinn, wobei k die Wellenzahl im Kabel ist. Bei e^{-2ikl} handelt es sich einfach um die Phase, die das Signal im Kabel zusätzlich aufnimmt. Die Impedanz, die man dann bei $z = -l$ misst, auch Eingangsimpedanz genannt, ist dann [7]

$$\frac{Z_{\text{ein}}}{Z_0} = \frac{1 + S_{11}(z = -l)}{1 - S_{11}(z = -l)} = \frac{Z_a + iZ_0 \tan(kl)}{Z_0 + iZ_a \tan(kl)} \quad (45)$$

Somit wurde Z_a in Z_{ein} transformiert. Man kann also Kabel auch gezielt zur Impedanztransformation und -anpassung verwenden. In der Praxis kann man die Referenzebene vom Port des VNA hin zum Ende des Kabels / dem Port des Bauteils verschieben, indem man eine Kalibration durchführt.

7 Anwendung in der Beschleunigerphysik und Kenngrößen des Resonators

Hochfrequenzresonatoren kommen in der Beschleunigerphysik in einer Vielzahl von Anwendungen zum Einsatz, z.B. zur Beschleunigung des Teilchenstrahls (Beschleunigungsstruktur), zur Diagnose (Strahlmonitor) oder zur Pulsformung (Buncher). Zur Beschleunigung des Teilchenstrahls eignet sich z.B. die TM_{010} -Mode des hier betrachteten Zylinderresonators, da das elektrische Feld dieser Mode parallel zur Strahlachse ist und bei dieser auch sein Maximum hat. Die von einem Teilchen mit Ladung q aufgenommene Energie ist dann

$$W_{\text{acc}} = \left| \int_0^h qE_z(z, t) dz \right| = qV_{\text{acc}}, \quad (46)$$

wobei man V_{acc} als Beschleunigungsspannung und $E_{\text{acc}} = V_{\text{acc}}/h$ als effektives Beschleunigungsfeld bezeichnet. Typische Werte für supraleitende Beschleunigungsstrukturen sind $E_{\text{acc}} = 5\text{--}25$ MV/m. Für die TM_{010} -Mode eines Zylinderresonators ist [2]

$$V_{\text{acc}} = hE_0 \frac{\sin[\omega_0 h/(2c)]}{[\omega_0 h/(2c)]}. \quad (47)$$

Der konkrete Wert von V_{acc} hängt natürlich von der Feldamplitude E_0 ab, welche durch die in den Resonator eingestrahlte HF-Leistung bestimmt ist. Ein limitierender Faktor ist dabei die Erwärmung des Resonators durch Ohm'sche Verluste mit Leistung P_Ω . Diese werden mit der Beschleunigungsspannung über die sogenannte Shunt-Impedanz R_a ins Verhältnis gesetzt, welche als

$$R_a = \frac{V_{\text{acc}}^2}{P_\Omega} \quad (48)$$

definiert ist. Sie hat die Einheit $[R_a] = 1 \Omega$. Die Shunt-Impedanz ist somit eine wichtige Kenngröße einer Beschleunigungsstruktur. Die Ohm'schen Verluste pro Flächeneinheit dA der Beschleunigungsstruktur sind

$$\frac{dP_\Omega}{dA} = \frac{1}{2} R_s |\vec{g}|^2, \quad (49)$$

wobei \vec{g} die durch das elektromagnetische Feld im Resonator induzierten Oberflächenströme ($[g] = 1$ A/m) und R_s der sogenannte Oberflächenwiderstand sind. Der Betrag der Oberflächenströme \vec{g} ist gleich dem der magnetischen Feldstärke $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ (also $|\vec{g}| = |\vec{H}|$), wobei μ_0 die Vakuumpermeabilität ist. Die Oberflächenströme fließen in einer Schicht mit einer effektiven Dicke gleich der Skintiefe

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0 \sigma \mu_r \mu_0}} \quad (50)$$

wobei μ_r und σ die relative Permeabilität und die Leitfähigkeit des Metalls sind, weshalb sich der Oberflächenwiderstand zu $R_s = 1/(\sigma \delta)$ ergibt. Die Ohm'sche Verlustleistung ist somit

$$P_\Omega = \frac{1}{2} R_s \int_{\partial V} dA |\vec{H}|^2. \quad (51)$$

Damit lässt sich auch die unbelastete Güte

$$Q_0 = \omega_0 \frac{E_{\text{res}}}{P_\Omega} = \frac{\omega_0 \mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 dV}{R_s \int_{\partial V} |\vec{H}|^2 dA} \quad (52)$$

berechnen. Es fällt auf, dass Q_0 sich aus dem Oberflächenwiderstand und dem Verhältnis eines Volumen- und eines Oberflächenintegrals über die Feldverteilung ergibt. Während R_s vom Material des Resonators abhängt, hängen die Integrale nur von der Geometrie des Resonators und den sich daraus ergebenden Feldverteilungen ab. Man definiert daher einen sogenannten Geometriefaktor G als

$$G = Q_0 R_s = \omega_0 \mu_0 \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dV}{\int_{\partial V} |\vec{H}|^2 dA}. \quad (53)$$

Der Geometriefaktor hat wie der Oberflächenwiderstand die Einheit $[G] = 1 \Omega$. Für die TM_{010} -Mode des Zylinderresonators ist er [2]

$$G = \frac{\omega_0 \mu_0 h R}{2(R+h)}. \quad (54)$$

Analog zum Geometriefaktor führt man die normierte Shunt-Impedanz R_a/Q_0 ein, die dann ebenfalls nur von der Resonatorgeometrie bzw. der betrachteten Mode abhängt. Für die TM_{010} -Mode ist sie [2]

$$\frac{R_a}{Q_0} = \frac{8\mu_0 c^2 h}{\pi^3 \omega_0 R^2 J_1^2(j_{0,1})}. \quad (55)$$

Für beliebige Resonatorgeometrien lassen sich G und R_a/Q_0 nur numerisch berechnen. Mit Hilfe der Materialkonstanten des verwendeten Metalls lassen sich dann Güte und Shunt-Impedanz einer Beschleunigungsstruktur abschätzen. Dabei zeigt sich der große Einfluss der Leitfähigkeit, was die Motivation zur Entwicklung von supraleitenden Beschleunigungsstrukturen war.

8 Aufgaben

Zu Hause vorbereiten:

1. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen der ersten 6 Moden des Zylinderresonators!
2. Wie sieht das Smith-Diagramm für eine Resonanzkurve (in Reflexion) aus?
3. Wie bestimmt man aus dem Smith-Diagramm, ob über- oder unterkritische Kopplung vorliegt?
4. Bringen Sie einen USB-Stick mit!

Durchführung

1. Machen Sie sich mit dem Versuchsaufbau vertraut!
2. Betrachten Sie die erste Resonanz in Transmission. Bestimmen sie ihre Resonanzfrequenz!
3. Schalten Sie die Vakuumpumpe ein. Wie verändert sich die Resonanzkurve?
4. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenzen der ersten 6 Eigenmoden! Ziehen Sie dazu den Einkoppler weit heraus ($L_A \approx 113.0$ mm).
5. Betrachten Sie die erste Resonanz in Reflexion. Vergleichen Sie die Resonanzkurve mit ihren Erwartungen!
6. Kalibrieren Sie den Netzwerkanalysator. Stellen Sie mit Hilfe des Smith-Diagramms kritische Kopplung ein!
7. Messen sie Reflexions- und Transmissions-Spektren für verschiedene Eindringtiefen der Antenne! Die gemessenen Spektren können auf einem mitgebrachten USB-Stick gespeichert werden.

Fragen für die Ausarbeitung:

1. Vergleichen Sie die berechneten und gemessenen Resonanzfrequenzen der ersten 6 Moden. Was sind mögliche Ursachen für etwaige Abweichungen?
2. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz, Gesamt- und Partialbreiten, (un-) belasteten Güten und Kopplungsfaktoren (für beide Koppler) für verschiedene Eindringtiefen des Kopplers! Wie bestimmen Sie, ob unter- oder überkritische Kopplung vorliegt?
3. Bestimmen Sie die funktionale Abhängigkeit des Kopplungsfaktors von der Eindringtiefe!
4. Zeigen Sie ein Smith-Diagramm für unterkritische, kritische und überkritische Kopplung. Vergleichen Sie es mit ihren Erwartungen!
5. Bestimmen Sie die unbelastete Güte des Resonators und berechnen Sie daraus seine Shunt-Impedanz und seinen Oberflächenwiderstand!
6. Berechnen Sie den theoretisch erwarteten Oberflächenwiderstand und die erwartete unbelastete Güte und vergleichen Sie diese mit den gemessenen Werten. Wie können etwaige Abweichungen erklärt werden?

Hinweise:

Die Anschlüsse der Koaxial-Kabel und anderer Steckverbindungen nur an den Muttern drehen!

Verwenden Sie $\sigma = 58 \cdot 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ und $\mu_r = 1$ für Kupfer.