
Untersuchung von E0-Übergängen in Kernen am Phasenübergang zwischen sphärischer und deformierter Kerngestalt

Masterthesis

Andreas Krugmann



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

*Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig:
Unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft,
etwas, in das man viel Zeit und Arbeit gesteckt hat,
wieder wegzuwerfen.*

A. Einstein



Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden mit dem geometrischen kollektiven Confined β -Soft Rotor Modell sehr große $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken im Übergangsbereich zwischen der X(5)-Lösung und dem Rigid Rotor Limit berechnet. Speziell für den Kern ^{150}Nd wurde ein $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ von $110 \cdot 10^{-3}$ bestimmt. Zur experimentellen Bestätigung ist die Methode der inelastischen Elektronenstreuung am S-DALINAC ausgewählt worden. Hierzu wurde der nötige Formalismus der Elektronenstreuung bis hin zur Extraktion des Monopolmatrixelementes ausführlich hergeleitet. Im Hinblick auf ein Experiment am S-DALINAC zur Bestimmung der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke in ^{150}Nd wurde mit Hilfe des CBS-Modells die Übergangsladungsdichte des E0-Übergangs berechnet und mittels einer Fourier-Bessel Analyse der Formfaktor des Übergangs extrahiert. Um herauszufinden, wie sensitiv man mit inelastischer Elektronenstreuung auf E0-Übergänge ist, wurden alte Elektronenstreudaten von ^{94}Mo auf den gleichen E0-Übergang untersucht und erstmalig eine obere Grenze für das Monopolmatrixelement dieses Überganges bestimmt. Mit den hier gewonnenen Erkenntnissen zur Sensitivität wurde das Experiment am ^{150}Nd geplant und Messdauern abgeschätzt.



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Elektronenstreuung bei niedrigem Impulsübertrag	3
2.1	Elektronenstreuformalismus	3
2.2	Hamiltonoperator für Elektronenstreuung	5
2.3	Analyse der Übergangsstärken	5
2.3.1	Plane Wave Born Approximation	6
2.3.2	Distorted Wave Born Approximation	9
2.4	Bestimmung von experimentelle Formfaktoren aus Elektronenstrespektren	9
2.5	Elektronenstreuung am S-DALINAC	10
2.6	Das LINTOTT-Spektrometer	10
2.7	Betriebsmodi	12
2.7.1	Dispersiver Modus	13
2.7.2	Energieverlust-Modus	13
3	Confined β-Soft Rotor Modell	15
3.1	Kollektive Koordinaten	15
3.2	Bohr-Hamiltonian	16
3.3	X(5)-Lösungsansatz für den Bohr-Hamiltonian	16
3.4	Confined β -Soft Rotor Modell (CBS)	17
3.5	Wellenfunktionen im CBS-Modell	18
3.6	Nachweis einer β -Vibration mit dem CBS-Modell?	21
4	$(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$-Übergänge im CBS-Modell	23
4.1	$\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken im CBS-Modell	23
4.2	Untersuchungen der Dichteverteilungen	24
4.3	Berechnete Ladungsdichteverteilungen in ^{150}Nd	25
4.3.1	Ladungsdichte des Grundzustands	26
4.3.2	Ladungsdichte des 0_2^+ Zustands in der β -Bande	27
4.3.3	Übergangsladungsdichte vom Grundzustand in den 0_2^+ Zustand	29
4.3.4	E0-Übergang in die s=3 Bande	30
5	Geplantes Elektronenstreuexperiment am S-DALINAC	31
5.1	Sensitivitätstest: Obere Grenze für $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ in ^{94}Mo	31

5.1.1	Verlauf der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in Mo-Isotopen	31
5.1.2	Messungen	32
5.1.3	Spektren	32
5.1.4	0_2^+ Zustand in ^{94}Mo	34
5.1.5	Auswertung des Formfaktors	34
5.2	Geplantes ^{150}Nd -Experiment	35
6	Zusammenfassung und Ausblick	39

1 Einleitung

Zur physikalischen Beschreibung von Kernen am Formphasenübergang von Vibrationskernen zu prolat deformierten Kernen gab es in den letzten Jahren viele neue Erkenntnisse. Mit seinem X(5)-Modell[1] schlug Iachello im Jahre 2001 eine analytische Näherungslösung des Bohr-Hamiltonians vor, der eine kollektive Beschreibung eines deformierten Kernes in den Deformationsvariablen β und γ darstellt. Als Potenzial wählte er ein unendlich hohes Kastenpotenzial in β . Die aus dem Lösen der Schrödingergleichung resultierenden Wellenfunktionen sind Besselfunktionen erster Art, die in dem Potenzial zwischen $\beta = 0$ und $\beta = \beta_{max}$ eingeschränkt sind. Ohne einen einzigen Parameter war man nun in der Lage analytische Wellenfunktionen für einen Bereich von Kernen in der Region des Formphasenüberganges in der $N=90$ Gegend zu beschreiben, wozu kein anderes Modell mit vergleichsweise wenig Aufwand in der Lage war. Um nicht nur auf die Region des Formphasenübergangs beschränkt zu sein, führte Norbert Pietralla in seinem Confined- β -Soft Rotor Modell (CBS-Modell) [2] noch eine weitere Potenzialwand bei einer minimalen Deformation β_{min} ein. Der Parameter $r_\beta = \beta_{min}/\beta_{max}$ beschreibt die Steifigkeit des Potenzials. Das CBS-Modell enthält als Grenzfälle für $r_\beta \rightarrow 0$ das X(5)-Modell und für $r_\beta \rightarrow 1$ den starren Rotor.

Im Rahmen des CBS-Modells konnten bisher Anregungsenergien sowie Übergangsstärken in der Grundzustandsbande in guter Übereinstimmung mit dem Experiment bestimmt werden.

Die vorliegende Arbeit geht einen Schritt weiter, indem sie sich auch mit Übergangsstärken zwischen zwei Banden beschäftigt. In Abbildung 1 sind exemplarisch zwei Übergänge zwischen Energieniveaus zweier rotationsähnlicher Banden dargestellt. Ebenfalls zu sehen ist der Sonderfall eines E0-Übergangs. Dieser Übergang muss strahlungslos erfolgen (beispielsweise durch innere Konversion), da er von einem Zustand mit $J^\pi = 0^+$ in einen Zustand der ebenfalls $J^\pi = 0^+$ hat, zerfällt. Viele Kernmodelle versagen bei der Beschreibung der E0 Übergangsstärken, oder benötigen sehr viele Parameter im Vergleich zu dem einen Strukturparameter im CBS-Modell. Es wurde bereits gezeigt [6, 7], dass das CBS Modell in Bezug auf E0-Übergangsstärken die richtigen absoluten Größenordnungen vorhersagt und sogar Tendenzen auf dem Übergangsweg zwischen X(5) und Rigid Rotor richtig beschreibt. Da E0-Übergänge strahlungslos erfolgen müssen, kann man beispielsweise mit viel Aufwand versuchen, Konversionselektronen zu spektroskopieren und über eine Lebensdauermessung auf die Übergangsstärke zurückzuschließen. Eine weitere Methode, um experimentellen Zugang zu E0-Übergängen zu bekommen, bietet die inelastische Elektronenstreuung. Hierbei nimmt man ein Anregungsspektrum des Kernes auf und kann aus den Wirkungsquerschnitten unter verschiedenen Impulsüberträgen die Übergangsstärken berechnen. Am Institut für Kernphysik der Technischen Universität Darmstadt gibt es den supraleitenden Elektronenlinearbeschleuniger S-DALINAC[11] mit mehreren Experimentierplätzen zur Elektronenstreuung. Die Elektronenstreuung stellt in dieser Arbeit das Mittel der Wahl dar, um E0-Übergangsstärken zu untersuchen. Daher wird ausführlich auf den Elektronenstreuformalismus eingegangen. Berechnungen der Übergangs-

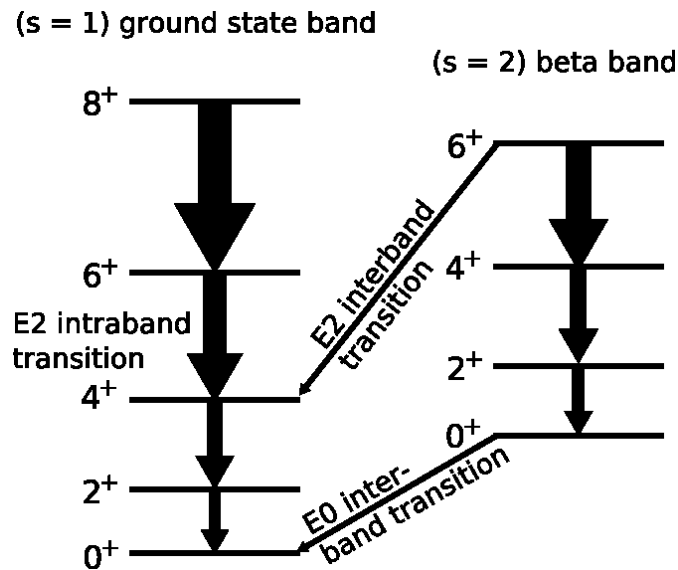


Abbildung 1.1: Beispiel eines Levelschemas eines Kerns mit rotationsähnlichen Banden. Links ist die Grundzustandsbande und rechts die sogenannte Beta-Bande, die in diesem Beispiel mit der ($s=2$)-Bande identifiziert wird, dargestellt. Die Dicke der Pfeile ist ein Maß für die Übergangsstärke.

ladungsdichten werden vorgestellt und die Übergangsformfaktoren berechnet. Ein Experiment dazu ist in Planung und anhand von Daten eines früher durchgeführten Experiments[8] wird gezeigt, wie sensitiv man auf die Bestimmung von E0-Übergangsstärken ist.

Die vorliegende Masterarbeit gliedert sich in sechs Kapitel. In Kapitel zwei wird zunächst die Theorie der Elektronenstreuung beschrieben und anschließend der Supraleitende Darmstädter Elektronenlinearbeschleuniger und eines seiner Elektronenstreuexperimente vorgestellt. Kapitel drei erläutert die Grundlagen des Confined β -Soft Rotor Modells, welches eine mögliche theoretische Beschreibung von deformierten Quantensystemen wie Atomkernen liefert. Anhand dieses Modells wird in Kapitel vier ein Formalismus erklärt, der es möglich macht, E0-Übergänge zu messen und deren Übergangsstärken zu bestimmen. In Kapitel fünf werden Rechnungen zu einem Elektronenstreuexperiment am Kern ^{150}Nd vorgestellt, dass im Rahmen einer anschließenden Dissertation durchgeführt wird. Dazu wurden Elektronenstreudaten eines bereits untersuchten Kernes zu Hilfe genommen. Die Analyse dieser Daten bietet eine Aussage über die Sensitivität eines zukünftigen Experimentes. Letztendlich werden in Kapitel sechs die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick in nachfolgende Projekte gegeben.

2 Elektronenstreuung bei niedrigem Impulsübertrag

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die Theorie der Elektronenstreuung gegeben werden. Hierbei wird zunächst der Streuformalismus erläutert und dann sowohl auf die Plane Wave Born Approximation (PWBA, für leichte Kerne), als auch auf die Distorted Wave Born Approximation (DWBA, für schwerere Kerne) eingegangen.

2.1 Elektronenstreuformalismus

Einfallende Elektronen der Energie E_0 streuen am Atomkern. Grundzustand und angeregte Kernzustände mit einer diskreten Anregungsenergie E_x können dann direkt in einem Energieverlustspektrum als Peaks sichtbar gemacht werden, wenn die gestreuten Elektronen der Energie E_f unter dem Winkel θ in einem Dipolmagneten impulsselektiert in der Fokalebene des Spektrometers nachgewiesen werden. Bei diesem Stoßprozess bleiben selbstverständlich Energie und Impuls erhalten und es gilt

$$E_0 = E_f + E_x + E_R. \quad (2.1)$$

Hierbei ist E_x die Anregungsenergie (siehe Abbildung 2.1), da sich der Kern bei inelastischen Streuprozessen

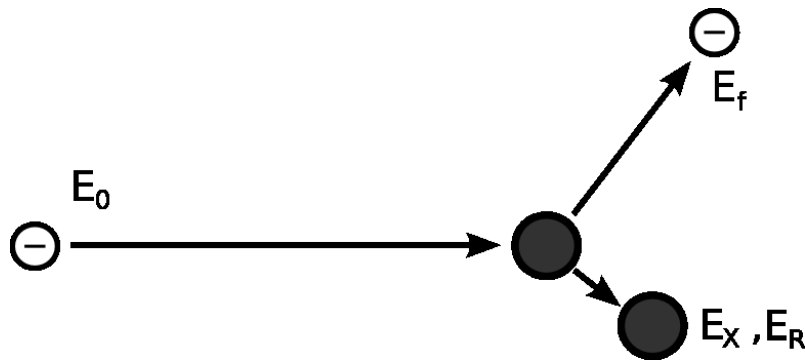


Abbildung 2.1: Skizze der einfallenden Elektronen mit der Energie E_0 , die auf einen Kern treffen, diesem einen Rückstoß E_R geben und in das Energieniveau E_x anheben und gestreut werden.

zessen in einem angeregten Niveau befindet, und E_R die Rückstoßenergie, die der Atomkern durch den Stoß des Elektrons aufnimmt. Da die Rückstoßenergie vernachlässigbar gering ist, vereinfacht sich die vorige Gleichung zu

$$E_x = E_0 - E_f. \quad (2.2)$$

Für die Impulserhaltung gilt:

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f, \quad (2.3)$$

wobei hier p_i und p_f die Impulse der Elektronen vor und nach dem Stoß sind. Der Betrag des Impulsübertrages $\vec{q}$ vom Elektron auf den Kern lässt sich als Funktion der Einschussenergie E_0 und des Streuwinkels θ schreiben als

$$q = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{2E_0(E_0 - E_x)(1 - \cos \theta) + E_x^2}. \quad (2.4)$$

Für die hier verwendeten Formeln gilt $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$ und $e^2 = 1,44 \text{ MeV fm}$.

Das Elektron wechselwirkt bei der Streuung mit der Ladungs- und Stromdichteverteilung des Kerns durch den Austausch von virtuellen Photonen. Man berücksichtigt in der Dirac'schen Störungstheorie erster Ordnung lediglich den Austausch *eines* virtuellen Photons. Damit lässt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$ für die Streuung unter dem Winkel θ , der ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen den Stoßpartnern ist, darstellen durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{1}{4\pi^2(\hbar c)^2} E_i E_f \left(\frac{p_f}{p_i}\right) \left(\frac{2J_f + 1}{2J_i + 1}\right) f_{rec} |\langle \Psi_f | \hat{H}_{int} | \Psi_i \rangle|^2. \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnen p_i und p_f die Dreierimpulse der Elektronen vor und nach dem Stoß, J_i und J_f den Gesamtdrehimpuls des Kernes vor und nach dem Stoß, $\hat{H}_{int}$ den Hamiltonoperator der Wechselwirkung und f_{rec} den Rückstoßfaktor, der sich zu

$$f_{rec} = \left(1 + \frac{2E_i \sin^2(\theta/2)}{Mc^2}\right)^{-1} \quad (2.6)$$

berechnet. Das Matrixelement $|\langle \Psi_f | \hat{H}_{int} | \Psi_i \rangle|^2$ beinhaltet die Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes beim Streuprozess und sämtliche Informationen über die Art der Wechselwirkung. Um dieses Matrixelement zu messen, definiert man den durch Streuung messbaren quadrierten Formfaktor

$$|F(E_0, q)|^2 = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} \quad (2.7)$$

als Quotienten des experimentellen differentiellen Wirkungsquerschnitt und des Mott-Wirkungsquerschnittes. Letzterer ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{Ze^2}{2E_0}\right)^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2}, \quad (2.8)$$

Der quadrierte Formfaktor $|F(E_0, q)|^2$ wird in Abhängigkeit des Impulsübertrags q aufgetragen. Aus Messungen des Formfaktors lassen sich Informationen über das Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung gewinnen.

2.2 Hamiltonoperator für Elektronenstreuung

Der Hamiltonoperator für Elektronenstreuungsprozesse lässt sich aus der Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung ableiten. Ein Bestandteil des Hamiltonoperators ist das elektromagnetische Potenzial, das von den bewegten Elektronen generiert wird

$$A^\mu(\vec{r}) = (\Phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})). \quad (2.9)$$

Dieses wechselwirkt mit der Ladungs- und Stromdichteverteilung des Kerns

$$j_\mu(\vec{r}) = \left(\rho(\vec{r}), \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}) \right), \quad (2.10)$$

so dass sich der Hamiltonoperator der Wechselwirkung beschreiben lässt als

$$\hat{H}_{int} = \int j_\mu(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^3r. \quad (2.11)$$

Zur weiteren Rechnung lässt er sich in eine longitudinale und eine transversale Komponente zerlegen

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_C + \hat{H}_T. \quad (2.12)$$

Der longitudinale Anteil des Hamiltonians beschreibt die Coulombwechselwirkung des Potentials des bewegten Elektrons mit der Ladungsverteilung des Kerns

$$\hat{H}_C = \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d^3r. \quad (2.13)$$

Der transversale Anteil beschreibt die Wechselwirkung mit der Strom- und Magnetisierungsdichte

$$\hat{H}_T = -\frac{1}{c} \int \left[\vec{j}^c(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\mu}^s(\vec{r}) \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right] d^3r. \quad (2.14)$$

Hierbei sind $\rho(\vec{r})$ der Übergangsoperator der Ladungsdichte, $\vec{j}^c(\vec{r})$ der Übergangsoperator des Konvektionsstromes und $\vec{\mu}^s(\vec{r})$ der Übergangsoperator der Magnetisierungsdichte des Kerns.

2.3 Analyse der Übergangsstärken

Wenn man aus Elektronenstreuungsdaten Übergangsstärken berechnen möchte, sollte zunächst einmal klar sein, dass mit zunehmender Kernladungszahl Z das Coulombfeld, das von den Protonen im Kern erzeugt wird, immer größer wird. So kann man für kleine Kerne die einfallenden und gestreuten Elektronen noch als Ebene Wellen nähern und man spricht von der Plane Wave Born Approximation (PWBA). Für schwere Kerne gilt das nicht mehr, da das Coulombfeld die einfallenden Elektronen zum Kern beschleunigt und die gestreuten Elektronen wieder abbremst. Für die Analyse von solchen Kernen verwendet man die Distorted Wave Born Approximation (DWBA).

2.3.1 Plane Wave Born Approximation

Für leichte Kerne, für die gilt

$$Z\alpha \ll 1, \quad (2.15)$$

kann man das Strahlungsfeld des virtuellen Photons, das bei dem Streuprozess ausgetauscht wird, nach Potenzen von $\vec{q} \cdot \vec{r}$ entwickeln. Berücksichtigt man lediglich die niedrigste Ordnung, was für die leichten Kerne gerechtfertigt ist, entspricht das Strahlungsfeld dem einer ebenen Welle

$$\vec{A}(\vec{q}, \vec{r}) \propto e^{i\vec{q}\vec{r}}. \quad (2.16)$$

Für diese ebenen Wellen wird der Hamiltonoperator nun nach Multipolen entwickelt

$$\langle \Psi_f | \hat{M}^{C\lambda}(q) | \Psi_i \rangle = \frac{(2\lambda + 1)!!}{q^\lambda} \int J_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \rho(\vec{r}) d^3r, \quad (2.17)$$

$$\langle \Psi_f | \hat{M}^{E\lambda}(q) | \Psi_i \rangle = \frac{(2\lambda + 1)!!}{q^{\lambda+1}} \int \left[(\vec{\nabla} \times J_\lambda(qr) \vec{Y}_{\lambda\mu}(\hat{r})) \vec{j}^c(\vec{r}) + q^2 J_\lambda(qr) \vec{Y}_{\lambda\mu}(\hat{r}) \vec{\mu}^s(\vec{r}) \right] d^3r, \quad (2.18)$$

$$\langle \Psi_f | \hat{M}^{M\lambda}(q) | \Psi_i \rangle = \frac{(2\lambda + 1)!!}{q^\lambda} \int \left[J_\lambda(qr) \vec{Y}_{\lambda\mu}(\hat{r}) \vec{j}^c(\vec{r}) + (\vec{\nabla} \times J_\lambda(qr) \vec{Y}_{\lambda\mu}(\hat{r})) \vec{\mu}^s(\vec{r}) \right] d^3r. \quad (2.19)$$

Hierbei sind $J_\lambda(qr)$ sphärische Besselfunktionen und $\vec{Y}_{\lambda\mu}(\hat{r})$ Vektorkugelfunktionen.

Der differenzielle Wirkungsquerschnitt lässt sich in der PWBA als Summe der elektrischen und magnetischen Wirkungsquerschnitte schreiben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \sum_\lambda \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{E\lambda} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{M\lambda} \right] \quad (2.20)$$

Für die elektrischen differenziellen Wirkungsquerschnitte gilt dabei:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{E\lambda} = \left(\frac{Ze^2}{E_i} \right)^2 f_{rec} \left[V_L |F(C\lambda, q)|^2 + V_T |F(E\lambda, q)|^2 \right] \quad (2.21)$$

und für magnetische Übergänge gilt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{M\lambda} = \left(\frac{Ze^2}{E_i} \right)^2 f_{rec} \left[V_T |F(M\lambda, q)|^2 \right] \quad (2.22)$$

Hierbei sind $|F(C\lambda, q)|^2$, $|F(E\lambda, q)|^2$ und $|F(M\lambda, q)|^2$ die in Gleichung (2.7) verwendeten Formfaktoren, die vom jeweiligen Matrixelement des Hamiltonoperators abhängig sind und die gesamte Kernstrukturinformation beinhalten. Speziell für den hier in der Arbeit gebrauchten longitudinalen Coulombformfaktor lässt sich schreiben:

$$F(C\lambda, q) = \frac{q^\lambda}{(2\lambda + 1)!! \sqrt{2J_i + 1}} \langle \Psi_f | \hat{M}^{C\lambda}(q) | \Psi_i \rangle \quad (2.23)$$

Die Größen V_L und V_T aus den Gleichungen (2.21) und (2.22) sind kinematische Faktoren und ergeben sich für den relativistischen Grenzfall ($E_i \gg m_0 c^2$) zu

$$V_L = \frac{1 + \cos \theta}{2(y - \cos \theta)^2} \quad (2.24)$$

$$V_T = \frac{2y + 1 - \cos \theta}{4(y - \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \quad (2.25)$$

mit

$$y = 1 + \frac{E_x^2}{2E_i(E_i - E_x)}. \quad (2.26)$$

Als modellunabhängiges Maß für die Anregungsstärke werden reduzierte Übergangswahrscheinlichkeiten definiert

$$B(X\lambda, q) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle \Psi_f | \hat{M}^{X\lambda}(q) | \Psi_i \rangle \right|^2 \quad (2.27)$$

mit X für C, E oder M . Für niedrige Impulsüberträge lässt sich das Matricelement, das nach Gleichungen 2.17 bis 2.19 durch Besselfunktionen und Kugelflächenfunktionen ausgedrückt ist, nach Potenzen von $q \cdot r$ entwickeln. Aus der Entwicklung der Besselfunktion

$$J_\lambda(qr) = \frac{(qr)^\lambda}{(2\lambda + 1)!!} - \frac{(qr)^{\lambda+2}}{2(2\lambda + 3)!!} + \frac{(qr)^{\lambda+4}}{2^2 \cdot 2!(2\lambda + 5)!!} - \frac{(qr)^{\lambda+6}}{2^3 \cdot 3!(2\lambda + 7)!!} + \dots \quad (2.28)$$

erhält man nun folgenden Ausdruck für die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit longitudinal elektrischer Anregungen:

$$\begin{aligned} [B(C\lambda, q)]^{1/2} &= [B(C\lambda, 0)]^{1/2} \cdot \left[1 - \frac{q^2}{2(2\lambda + 3)} \frac{\langle r^{\lambda+2} \rangle_{tr}}{\langle r^\lambda \rangle_{tr}} + \right. \\ &+ \frac{q^4}{2^2 \cdot 2!(2\lambda + 5)(2\lambda + 3)} \frac{\langle r^{\lambda+4} \rangle_{tr}}{\langle r^\lambda \rangle_{tr}} - \frac{q^6}{2^3 \cdot 3!(2\lambda + 7)(2\lambda + 5)(2\lambda + 3)} \frac{\langle r^{\lambda+6} \rangle_{tr}}{\langle r^\lambda \rangle_{tr}} + \dots \left. \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit der Definition

$$\langle r^\lambda \rangle_{tr} = 4\pi \int r^{\lambda+2} \rho(r) dr. \quad (2.30)$$

Monopolübergänge mit der Multipolarität $\lambda = 0$, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen, sind reine longitudinale elektrische Übergänge, da die transversalen Anteile aufgrund der Auswahlregeln für Multipolstrahlung verboten sind. Im Bereich von niedrigen Impulsüberträgen (q gegen 0) kann man für kollektive Übergänge die Übergangsstärke $B(E0, q)$ durch das Siegert-Theorem[14] abschätzen

$$B(E0, q) = \frac{k^2}{q^2} B(C0, q). \quad (2.31)$$

Am Photonenpunktes gilt $q = k$ und somit $B(E0, q) = B(C0, q)$. Für die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit in gerade-gerade Kernen mit einem $J^\pi = 0^+$ Grundzustand reduziert sich Gleichung (2.27) zu

$$B(C0, q) = \left| \langle \Psi_f | \hat{M}^{C0}(q) | \Psi_{0^+} \rangle \right|^2. \quad (2.32)$$

Betrachtet man wieder den Spezialfall eines Monopolübergangs verschwindet der erste Term in der Entwicklung (2.29), weil wegen der Orthogonalität der Wellenfunktion von Grund- und angeregtem Zustand gilt:

$$\langle r^{\lambda=0} \rangle_{tr} \equiv 0. \quad (2.33)$$

Somit findet man für Monopolübergänge folgende Beziehung:

$$[4\pi B(C0, q)]^{1/2} = \frac{q^2}{6} ME \left[1 - \frac{q^2}{20} R_{tr}^2 + \frac{q^4}{840} \frac{\langle r^6 \rangle_{tr}}{\langle r^2 \rangle_{tr}} - \frac{q^6}{60480} \frac{\langle r^8 \rangle_{tr}}{\langle r^2 \rangle_{tr}} + \dots \right]. \quad (2.34)$$

Der Ausdruck

$$ME = \langle r^2 \rangle_{tr} = 4\pi \int \rho_{tr}(r) r^4 dr \quad (2.35)$$

beschreibt das Monopolmatrixelement und man definiert den Übergangsradius R_{tr} als

$$R_{tr} = \left[\frac{\langle r^4 \rangle_{tr}}{\langle r^2 \rangle_{tr}} \right]^{1/2}. \quad (2.36)$$

Um das experimentelle Monopolmatrixelement aus Streudaten extrahieren zu können, muss man nun lediglich die Größe $[4\pi B(C0, q)]^{1/2}$ über q^2 auftragen und den Verlauf der Geraden zum Photonenpunkt ($q = k$) extrapolieren. Bei einem linearen Fit, bei dem ME und R_{tr}^2 freie Parameter sind, die an die Datenpunkte angefitet werden, geht man davon aus, dass alle Potenzen von q die größer gleich q^4 sind, vernachlässigbar sind.

Nun ist es möglich, eine modellunabhängige Analyse der Formfaktoren durchzuführen. Man muss die bei niedrigem Impulsübertrag gemessenen experimentellen Wirkungsquerschnitte $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ in PWBA Wirkungsquerschnitte $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{PWBA}$ konvertieren. Dies geschieht mittels Coulomb-Korrekturen, die vom Impulsübertrag q , von der Elektronenenergie E_0 , sowie von der Anregungsenergie des angeregten Zustandes E_x abhängen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{PWBA} = \frac{1}{f_c(q, E_0, E_x)} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} \quad (2.37)$$

mit

$$f_c(q, E_0, E_x) = \left[\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{DWBA}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{PWBA}} \right]_{theo}. \quad (2.38)$$

Anschaulich sind diese Coulombkorrekturen dafür zuständig, die experimentellen an die theoretischen PWBA-Wirkungsquerschnitte anzupassen, da durch das Coulombfeld des Kernes die einfallenden und ausfallenden Elektronenwellen beeinflusst werden. Für leichte Kerne ist dies noch mit Hilfe eines Korrekturfaktors möglich.

2.3.2 Distorted Wave Born Approximation

Bei schweren Kernen, bei denen das Coulombpotenzial eine größere Rolle spielt (wie z.B.: ^{150}Nd in Kapitel 3) reichen die Korrekturfaktoren nicht mehr aus um die Wirkungsquerschnitte richtig zu beschreiben. Die Näherungen, die für den Fall der DWBA gemacht wurden, sind hier nicht mehr länger gültig. Das Coulombpotenzial hat einen so großen Einfluss auf die einfallenden Elektronen, dass sie beim Annähern an den Kern beschleunigt werden und nach der Streuung wieder abgebremst werden. Dies hat ein Verzerren der Elektronenwellen zur Folge.

Hier benötigt man nun ein explizites Kernmodell zur Berechnung der $M\lambda(q)$. Durch numerische Lösung der Dirac-Gleichung kann man dann Formfaktoren gewinnen. Aus einer Anpassung der experimentellen Daten an den theoretisch berechneten Formfaktorverlauf können dann die Übergangsstärken bestimmt werden.

In dieser Arbeit wurde mit Hilfe des CBS Rotor Modells eine Übergangsladungsdichte für den $E0(0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergang in ^{150}Nd berechnet, aus der dann mit Hilfe eines DWBA-Codes der Verlauf des theoretischen Formfaktors ermittelt wurde.

2.4 Bestimmung von experimentelle Formfaktoren aus Elektronenstreuenspektren

Dieses Kapitel beschäftigt sich noch kurz mit der Fragestellung, wie man aus den erhaltenen Spektren letztendlich auf den experimentellen Formfaktor schließen kann, den man dann mit dem theoretisch berechneten Formfaktor vergleichen möchte.

Zunächst einmal werden unter verschiedenen Streuwinkeln Rohspektren aufgezeichnet. Diese Rohspektren zeigen gezählte Ereignisse pro Kanalnummer an. Das bedeutet, man muss die Spektren zunächst einmal eichen. Der elastischen Linie wird die Anregungsenergie von 0 keV zugeordnet und mit weiteren bekannten Linien lässt sich dann eine Energieeichung durchführen. Um nun die Formfaktoren aus den Streudaten unter verschiedenen Winkeln zu ermitteln sollte man sich zunächst einmal klar machen, wie der Formfaktor mit der Anzahl der Counts in einem Peak (oder Peakfläche A) zusammenhängt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{A}{\Delta\Omega} \cdot \frac{e}{It} \cdot \frac{M}{t_{eff}N_A} \frac{100}{\epsilon} \quad (2.39)$$

Hierbei ist A die Fläche unter einem Peak, $\Delta\Omega$ der Raumwinkel des Spektrometers, $I \cdot t$ die gesammelte Ladung, M die molare Masse des Isotopes, t_{eff} die effektive Targetdicke, die ein Elektron durchfliegen muss und ϵ ein Maß für die Isotopenreinheit des Targets. Die Flächen unter den Peaks lassen sich beispielsweise mit dem Programm FIT [20, 21] an Modellfunktionen anpassen, die die Linienform möglichst detailgetreu repräsentieren.

Da der Formfaktor gerade der auf Mottwirkungsquerschnitt normierte experimentelle Wirkungsquerschnitt ist, lässt sich aus dem Verhältnis der Flächen unter dem Peak der elastischen Linie und der in-

elastischen Linie der inelastische experimentelle Wirkungsquerschnitt ermitteln. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass man einen theoretischen Wert für den elastischen Wirkungsquerschnitt kennt. Es gilt:

$$\frac{A_{\text{elast}}}{A_{\text{inelast}}} = \frac{|F(q)|_{\text{elast}}^2}{|F(q)|_{\text{inelast}}^2}. \quad (2.40)$$

Elastische Wirkungsquerschnitte lassen sich mit dem Programm PHASHI [17] berechnen. Dieses Programm benötigt eine Grundzustandsladungsdichte des zu untersuchenden Kerns in einer 3 Parameter-Fermi-Verteilung, sowie Informationen über die Kinematik des Experiments.

Hat man nun die Werte für den inelastischen Formfaktor aus Gleichung (2.40) für alle untersuchten Streuwinkel berechnet, so kann man den experimentellen Formfaktor als Funktion des Impulsübertrags darstellen.

2.5 Elektronenstreuung am S-DALINAC

Seit 1991 ist am Institut für Kernphysik an der Technischen Universität Darmstadt der zweifach rezirkulierende Elektronenlinearbeschleuniger S-DALINAC[11] im Einsatz, der im Rahmen zahlreicher Diplom- und Doktorarbeiten aufgebaut wurde und beständig weiterentwickelt wird. Seine supraleitenden 3 GHz-Kavitäten ermöglichen einen Elektronenstrahl mit Designwerten einer Energie von bis zu 130 MeV und einem Strahlstrom von maximal $20 \mu\text{A}$ für den Hauptbeschleuniger. Verschiedene Messapparaturen (siehe Abbildung 2.2) erlauben ein breites Spektrum an Experimenten zur Kernstrukturphysik.

2.6 Das LINTOTT-Spektrometer

Das Thema dieser Masterarbeit ist die Planung eines Elektronenstreuexperimentes am hochauflösenden 169° -Elektronenstreuspektrometer (LINTOTT-Spektrometer)[12]. Zur Abschätzung der Sensitivität werden bereits gewonnene Daten vom LINTOTT-Spektrometer untersucht. Abbildung 2.3 zeigt ein Foto des Spektrometers. Hier werden die im S-DALINAC beschleunigten Elektronen der Energie E_0 auf ein in der Mitte der Streukammer befindliches Target geschossen. Die gestreuten Elektronen, die im Raumwinkelbereich $\Delta\Omega$ die Streukammer verlassen, werden in einem großen Dipolmagnet abgelenkt und selektiert nach Impulsen in einem Detektorsystem in der Fokalebene des Spektrometers nachgewiesen. Der Dipolmagnet lenkt die Elektronen um 169.7° ab und die Fokalebene ist nochmal um 35° gegen die Sollbahn gekippt um Abbildungsfehler zu minimieren[9].

Das Detektorsystem besteht aus 4 Siliziumstreifenzählermodulen, die jeweils 6.9 cm lang sind und 96 Streifen (Kanäle) beinhalten. Somit wird mit dem Gesamtzähler die 24 cm lange Fokalebene komplett abgedeckt. Der Abstand zwischen zwei Modulen entspricht etwa der Breite von 10.5 Streifen. Somit erhält man Spektren, die einen Bereich von 415.5 Streifen abdecken. Um lückenlose Energiespektren zu erhalten, müssen jeweils zwei Messungen bei gleichem Detektorwinkel mit leicht veränderten Magnetfedeinstellungen durchgeführt werden. Abbildung 2.4 zeigt exemplarisch ein am LINTOTT-Spektrometer

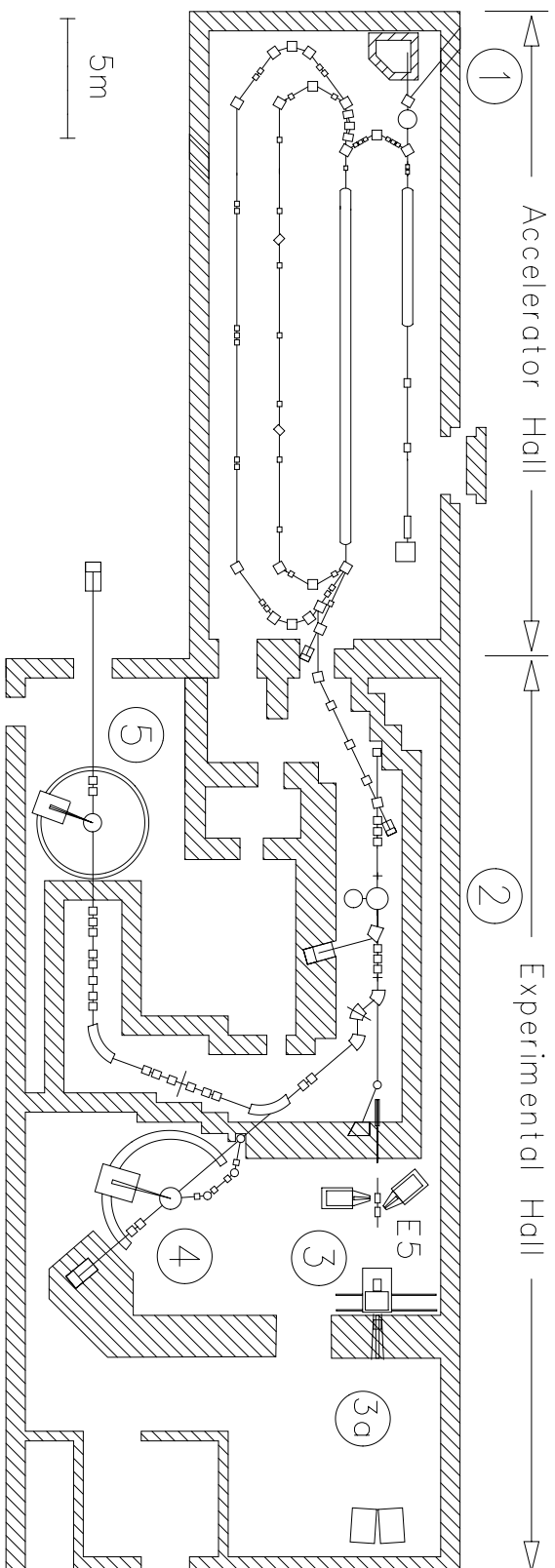


Abbildung 2.2: S-DALINAC mit Extraktion und Experimentierplätzen. ① (γ, γ')-Messplatz, ② Extraktion mit Experimenten zur Hochenergie-Channeling-Strahlung, ③ Polarisierbarkeit des Nukleons, sowie der Niederenergie-Photonentagger und Neutronendetektor NEPTUN, ④ Q-CLAM-Spektrometer, ⑤ LINTOTT-Spektrometer.

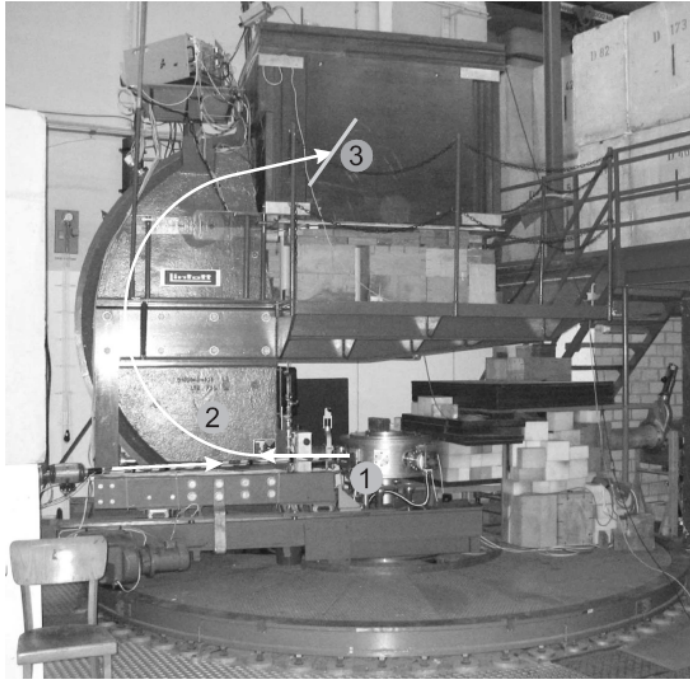


Abbildung 2.3: Foto des hochauflösenden LINTOTT Spektrometers. Zu sehen sind hier: ① Streukammer, in der sich das Target befindet, ② Dipolmagnet und ③ Fokalebene mit den Detektoreinheiten.

aufgenommenes Rohspektrum. Man kann links im Bild die elastische Linie erkennen und rechts eine angeregte Linie. Außerdem sieht man deutlich die drei Lücken in der Mitte, die durch die Abstände zwischen jeweils zwei Siliziumstreifenzählermodulen zu erklären sind. Um die gemessenen Spektren später auf die gesammelte Ladung normieren zu können, ist hinter der Streukammer ein Faraday-Cup angebracht, der die nicht gestreuten Elektronen detektiert.

2.7 Betriebsmodi

Das LINTOTT Spektrometer lässt sich in zwei unterschiedlichen Betriebsmodi betreiben. Der Hauptunterschied dabei ist die erreichte Energieauflösung des Spektrometers. Gemeinsamkeiten sind hier selbstverständlich die Beziehung zwischen Impuls p des Elektrons in GeV , Ablenkradius R in m und Magnetfeld B in T

$$B \cdot R = 0.3356p, \quad (2.41)$$

sowie die daraus resultierende Dispersion in einem Dipolmagneten. Dispersion bedeutet, dass Teilchen höheren Impulses einen größeren Ablenkradius haben. Man erhält den Versatz Δx in der Fokalebene für Teilchen mit der Impulsabweichung Δp vom Sollimpuls p_0 und der Dispersion D_{sp}

$$\Delta x = D_{sp} \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (2.42)$$

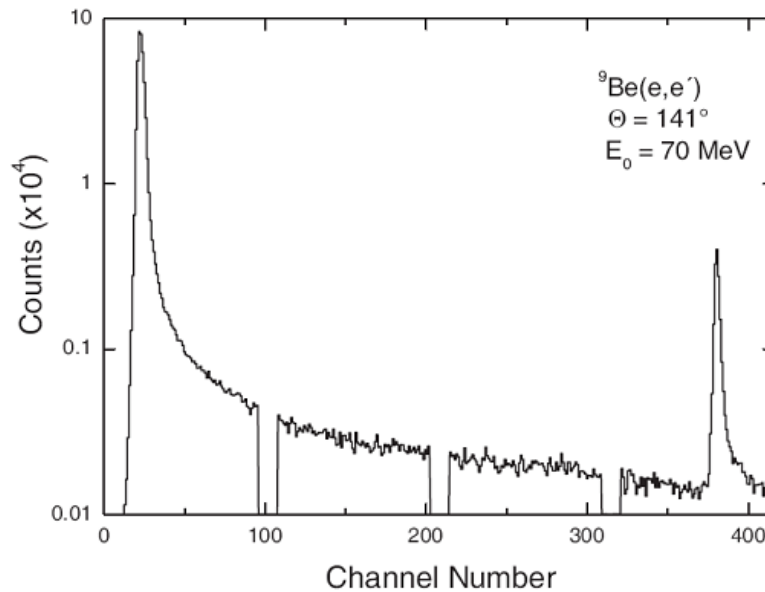


Abbildung 2.4: Beispielspektrum aus einem ^9Be -Experiment am LINTOTT-Spektrometer. Man kann deutlich die elastische Linie (links), die inelastische Linie (rechts), sowie die drei Lücken im Spektrum erkennen.

2.7.1 Dispersiver Modus

Um im normalen dispersiven Modus zu messen, fokussiert man den Elektronenstrahl als Punktquelle auf dem Target. Wegen der unterschiedlich langen Flugbahnen innerhalb des Magnetfelds werden Elektronen mit gleichem Impuls p und unterschiedlichen Eintrittswinkeln in der Fokalebene auf denselben Punkt projiziert. Das Spektrometer wirkt also radial fokussierend. Die Messgröße ist also die absolute Restenergie der gestreuten Elektronen. Dies bedeutet allerdings, dass die effektive Energieauflösung von der Impulsunschärfe des Strahls abhängt. In einer Strahlzeit im Sommer 2004 wurden im dispersiven Modus beispielsweise Auflösungen von $\Delta E = 40 - 80$ keV (FWHM) erreicht. Die Abhängigkeit der Auflösung von den Strahleigenschaften kann zum Problem werden, da die Auflösung je nach Einstellung des Beschleunigers stark schwanken kann.

2.7.2 Energieverlust-Modus

Neben dem dispersiven Modus gibt es noch einen weiteren Modus, den sogenannten Energieverlust-Modus (Energy-Loss-Modus) [10]. Hierbei wird die Dispersion der Strahlführungselemente in der Extraktion des Beschleunigers an die Dispersion des Spektrometers angepasst. Somit wird die Energieauflösung unabhängig von der Strahlqualität, denn alle gestreuten Elektronen mit dem gleichen Energieverlust im Target werden auf den gleichen Punkt in der Fokalebene abgebildet. Um eine hohe Zählrate zu erhalten, sollten relativ dicke Targets von etwa 10 mg/cm^2 verwendet werden. Die Energieauflösung ist hier somit hauptsächlich durch den unterschiedlichen Energieverlust der Elektronen im Target begrenzt. In diesem

Modus sind realistische Energieauflösungen von bis zu 25 keV bei einer Einschusselektronenenergie von etwa 70 MeV möglich.

Tabelle 2.1 zeigt einige technische Details dieses Spektrometers.

Impulsakzeptanz:	$\frac{\Delta p}{p} = \pm 2\%$
Raumwinkelakzeptanz:	$\Omega_{max} \approx 6 \text{ msr}$
Maximale relative Energieauflösung:	$3 \cdot 10^{-4}$ (FWHM)
Streuwinkelbereich:	$33^\circ - 165^\circ$ (12 Schritte)

Tabelle 2.1: Einige technische Details des hochauflösenden LINTOTT-Spektrometers.

3 Confined β -Soft Rotor Modell

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit benötigten theoretischen Grundlagen erläutert und das Confined β -Soft Rotor Modell vorgestellt. Dieses Modell erlaubt eine hervorragende Beschreibung von Kernen zwischen dem Deformations-Phasenübergang und dem Starren Rotor.

3.1 Kollektive Koordinaten

Atomkerne bestehen im allgemeinen aus einer großen Anzahl von Protonen und Neutronen, die jeweils durch die Kernkräfte miteinander wechselwirken. Möchte man nun Kerne im Sinne eines geometrischen makroskopischen Modells beschreiben, muss man sich von der Vorstellung vieler einzelner Nukleonen mit den Koordinaten x_i lösen und vielmehr zu einer kollektiven Beschreibung übergehen. Dafür wird üblicherweise ein Satz von Normalkoordinaten $\alpha_{\lambda\mu}$ verwendet, die man durch die Entwicklung der Oberfläche nach Kugelflächenfunktionen $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ erhält. Es gilt:

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[1 + a_{00}Y_{00} + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] \quad (3.1)$$

mit

$$-\lambda \leq \mu \leq \lambda \quad (3.2)$$

$R(\theta, \phi)$ ist der Vektor von Mittelpunkt (Koordinatenursprung) zur Oberfläche. R_0 ist der Gleichgewichtsradius eines sphärischen Kernes mit gleichem Volumen und kann durch $1,2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$ genähert werden. Der Term $a_{00}Y_{00}$ dient der Volumenerhaltung, welche aufgrund der Inkompressibilität der Kernmaterie, gefordert werden muss. Die niedrigste Ordnung ($\lambda = 0$) beschreibt lediglich eine Kompression des Kernes, die nächsthöhere Ordnung ($\lambda = 1$) eine Verschiebung des ganzen Kernes vom Nullpunkt. Die fünf Quadrupolkomponenten mit $\lambda = 2$ bilden einen vollständigen Koordinatensatz, der eine Oberflächenschwingung niedrigster Ordnung beschreibt. Parametrisiert man diesen Koordinatensatz geschickterweise so, dass die Hauptträgheitsachsen des Körpers mit den Koordinatenachsen übereinstimmen, verschwinden die Komponenten a_{21} und a_{2-1} und es gilt weiterhin:

$$a_{20} = \beta \cos \gamma \quad (3.3)$$

$$a_{22} = a_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \quad (3.4)$$

Hier sind β und γ die Quadrupoldeformationsparameter, die mit den drei Eulerwinkeln wieder einen vollständigen Koordinatensatz bilden. Die Variable β beschreibt eine axiale Deformation, der Parameter

γ ist ein Maß für die Triaxialität des Kernes und die Eulerwinkel $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ beschreiben die Ausrichtung des deformierten Kernes im Raum. Die Abbildungen 3.1 bis 3.3 zeigen zuerst einen sphärischen Kern mit $\beta=0$, dann einen prolat deformierten Kern mit einem für die stabilen seltenen Erden realistischen Wert von $\beta=0.3$, sowie einen triaxialen Kern mit $\beta=0.3$ und $\gamma=\pi/3$.

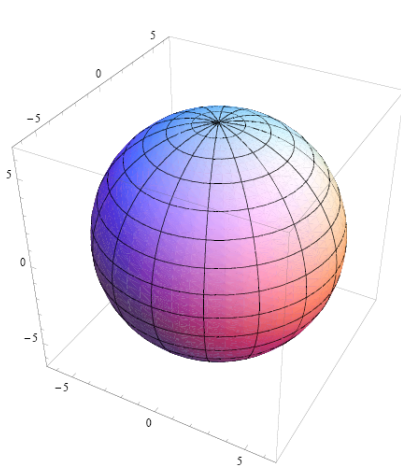


Abbildung 3.1: $\beta=0, \gamma=0$

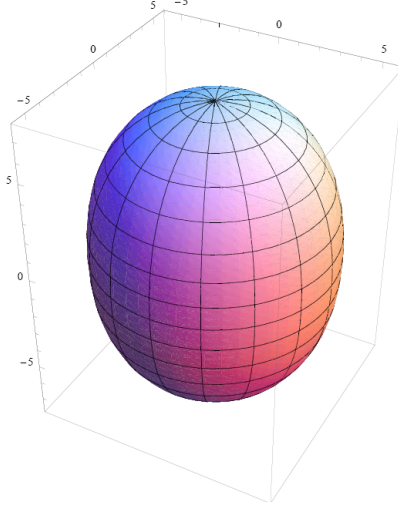


Abbildung 3.2: $\beta=0.3, \gamma=0$

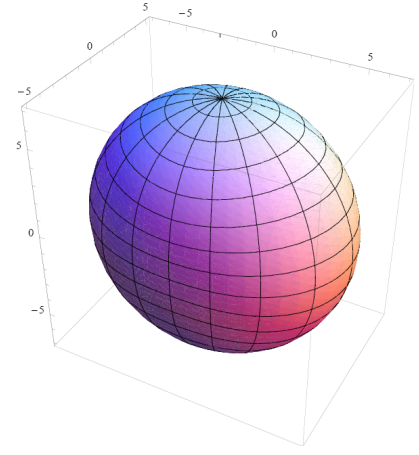


Abbildung 3.3: $\beta=0.3, \gamma=\pi/3$

3.2 Bohr-Hamiltonian

Der Hamiltonoperator für einen durch Quadrupoldeformationsparameter beschreibbaren Kern wurde von Aage Bohr in den 50er Jahren des 20ten Jahrhunderts hergeleitet [4]. Er ging dabei von der Zusammensetzung der Energie in einen kinetischen Term und einen Potenzialterm aus, wobei der kinetische Term nochmals in einen Vibrationsteil und einen Rotationsteil aufgespalten werden kann.

$$H_{Bohr} = T + V = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma) \quad (3.5)$$

$$H_{Bohr} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3} \pi k \right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (3.6)$$

Das Potenzial $V(\beta, \gamma)$ hängt selbstverständlich vom verwendeten Kernmodell ab.

3.3 X(5)-Lösungsansatz für den Bohr-Hamiltonian

Der Bereich in der Nuklidkarte, der für die in dieser Arbeit untersuchten CBS-Kerne relevant ist, beschränkt sich auf gerade-gerade-Kerne der seltenen Erden im Massenbereich von $A = 150$, wo es einen sogenannten Formphasenübergang gibt. Auf der linken Seite der Abbildung 3.4 sieht man das Potenzial eines sphärischen Vibrationskernes, wie man es in der Nähe eines Schalenabschlusses erwartet. Erhöht man die Anzahl der Valenznukleonen und durchquert somit das für diese Arbeit interessante Gebiet des

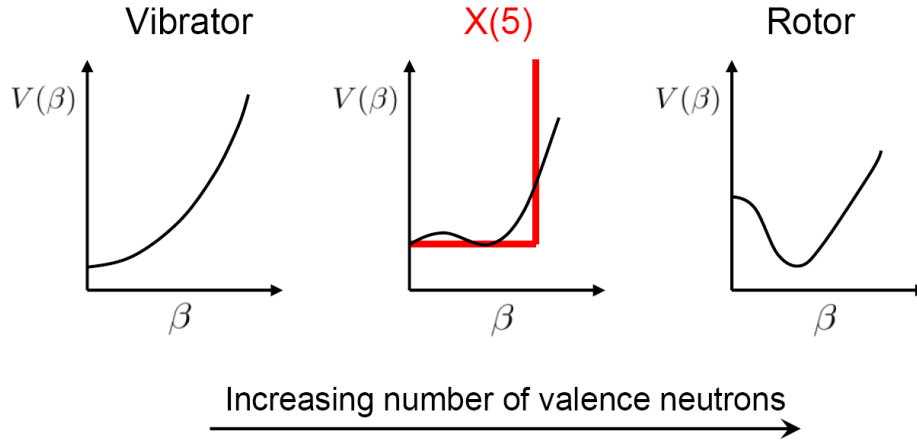


Abbildung 3.4: Potenzialentwicklung im Gebiet des Formphasenüberganges

Formphasenüberganges, so bildet sich im Potenzial ein ausgeprägtes Minimum bei einer bestimmten Deformation β aus und man nähert sich dem Grenzfall des starren Rotors (siehe Abbildung 3.4 rechts).

Im Jahr 2001 veröffentlichte Iachello einen analytischen Lösungsansatz [1] zum Bohr-Hamiltonian. Er entkoppelte das Potenzial in ein unendlich hohes Kastenpotenzial in der Deformationsvariablen β , was in Abbildung 3.4 in der Mitte dargestellt ist, sowie ein harmonisches Oszillatorpotenzial in der Variablen γ das um eine Ruhelage von $\gamma \approx 0$ schwingt. Dieser Ansatz ist unter dem Namen X(5)-Modell [1] bekannt geworden. Vorteile dieses Lösungsansatzes sind die analytischen Lösungswellenfunktionen in Form von Besselfunktionen erster Art und die Tatsache, dass es sich um ein parameterfreies Modell handelt. Ein Kern, der gut mit dem X(5)-Modell beschrieben werden kann, ist ^{150}Nd . Hier werden die Grundzustandsenergien und die B(E2)-Übergangsstärken sehr gut reproduziert [5]. Abbildung 3.5 zeigt einen Vergleich der Energien und B(E2)-Übergangsstärken der Grundzustandsbande ($s=1$) und der β -Bande ($s=2$) von ^{150}Nd mit der Voraussage des X(5)-Modells.

Das $R_{4/2}$ -Verhältnis gibt das Energieverhältnis des 4^+ -Zustands zu dem 2^+ -Zustand aus der Grundzustandsbande an:

$$R_{4/2} = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)}. \quad (3.7)$$

Signaturen für einen möglichen X(5)-Kern ist ein $R_{4/2}$ -Verhältnis von 2.90.

3.4 Confined β -Soft Rotor Modell (CBS)

Iachello geht in seinem X(5)-Modell von einem unendlich hohen Kastenpotenzial in der Deformationsvariablen β aus, mit den Potenzialwänden für $\beta = 0$ und für $\beta = \beta_{\max}$ (vergleiche Abbildung 3.6). Pietralla ging im Jahr 2004 in der Formulierung seines CBS Rotor Modells [2] noch einen Schritt weiter, indem er nicht nur die maximale Deformation festlegte, sondern auch noch einen inneren Potenzial-

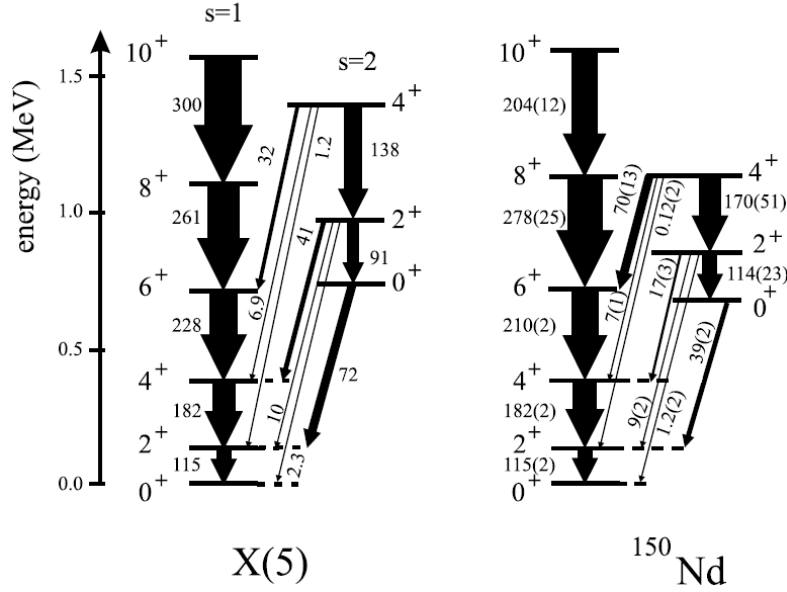


Abbildung 3.5: Vergleich der Energien (in MeV) und E2-Übergangsstärken (in W.u.) des Kernes ^{150}Nd mit dem X(5)-Modell [5]. Die theoretischen E2-Übergangsstärken wurden an den $E2(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ -Übergang angepasst.

wall bei $\beta_{\min}$ einführt. Die Wellenfunktionen in der Deformationsvariablen β sind nun zwischen dem Deformationswerten $\beta_{\min}$ und $\beta_{\max}$ begrenzt (confined). Führt man nun den Strukturparameter

$$r_\beta = \frac{\beta_{\min}}{\beta_{\max}} \quad (3.8)$$

ein, so ist man in der Lage einen ganzen Bereich von Kernen um den Formphasenübergang in der Gegend von $N=90$ zu beschreiben, sowie den Bereich zwischen der X(5) Lösung und dem Starren Rotor nur durch Veränderung des Parameters r_β interpolieren zu können. Signaturen für Kerne, die sich mit dem CBS-Modell beschreiben lassen sind unter anderem ein $R_{4/2}$ -Verhältnis zwischen 2.9 (für X(5)-Kerne) bis hin zu 3.33 (für den starren Rotor). Abbildung 3.7 zeigt das CBS-Potenzial exemplarisch für den Wert $r_\beta = 0.3$.

3.5 Wellenfunktionen im CBS-Modell

Um einen analytischen Ausdruck für die Wellenfunktion eines Zustands zu erhalten, muss nun eine Lösung der Schrödingergleichung gesucht werden.

$$H_{\text{Bohr}} \Psi = E \Psi \quad (3.9)$$

Für axialsymmetrische prolat deformierte Kerne, wie man sie in der Region zwischen den X(5)-Kernen und dem Rigid Rotor Limit vorliegen hat, wird nun, wie auch schon in der X(5)-Lösung, die Näherung gemacht:

$$V(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma). \quad (3.10)$$

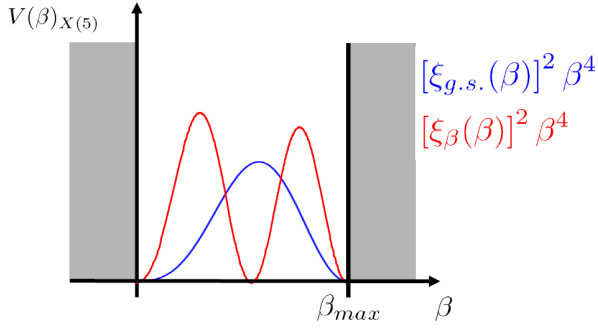


Abbildung 3.6: X(5)-Potential mit den quadrierten Wellenfunktionen des Grundzustands und des 0_2^+ Zustands der β -Bande

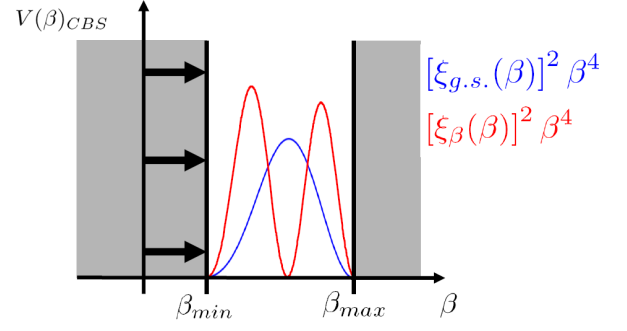


Abbildung 3.7: CBS-Potential mit den quadrierten Wellenfunktionen des Grundzustands und des 0_2^+ Zustands der β -Bande

Diese Separation in einen β - und einen γ -abhängigen Teil des Potentials ist gerechtfertigt, da die Kerngestalt näherungsweise durch $\gamma \approx 0^\circ$ beschrieben werden kann, also weitestgehend unabhängig von dieser Variablen ist. Man lässt in dieser Formulierung höchstens minimale Fluktuationen von γ um $\gamma = 0$ zu und setzt als Gesamtwellenfunktion an:

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \xi_L(\beta) \eta_K(\gamma) D_{M,K}^L(\theta_i), \quad (3.11)$$

wobei hier η einen harmonischen Oszillator in γ beschreibt, D die Wigner Funktionen mit den Eulerwinkeln θ_i sind und ξ die Wellenfunktion in der Deformationsvariablen β ist, die wir nun berechnen wollen. Aus Gleichung 3.9 kann man eine 'radiale' Schrödingergleichung, die nur von β abhängt separieren und man kommt auf folgenden Ausdruck:

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{3\beta^2} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = E \xi_L(\beta). \quad (3.12)$$

Führt man nun eine Variablentransformation durch und setzt:

$$z = \sqrt{\frac{E}{\frac{\hbar^2}{2B}}} \beta, \quad (3.13)$$

sowie

$$\tilde{\xi}(z) = \beta(z)^{\frac{3}{2}} \xi_L(\beta(z)), \quad (3.14)$$

so kommt man schließlich auf eine Bessel-Differenzialgleichung.

$$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \tilde{\xi} = 0. \quad (3.15)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine Überlagerung von Besselfunktionen erster Art ($J_\nu(z)$) und zweiter Art ($Y_\nu(z)$) mit irrationaler Ordnung $\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}}$. Man erhält:

$$\tilde{\xi}_\nu(z) \propto J_\nu(z) + \gamma_Y Y_\nu(z). \quad (3.16)$$

Hierbei steht γ_Y für die relative Amplitude der Besselfunktion $Y_\nu(z)$. Um die Randbedingungen (Wellenfunktion wird Null an den Potenzialwänden) zu erfüllen, muss folgendes gelten:

$$\tilde{\xi}_\nu(r_\beta z_M) = \tilde{\xi}_\nu(z_M) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.17)$$

Hierbei ist $z_M = \sqrt{\frac{E}{\hbar^2}} \beta_{max}$. Aus den beiden Randbedingungen ergibt sich ein Ausdruck für die relative Amplitude der Besselfunktion der zweiten Art:

$$\gamma_Y = -\frac{J_\nu(r_\beta z_M)}{Y_\nu(r_\beta z_M)}. \quad (3.18)$$

Man erhält somit als Quantisierungsbedingung:

$$Q_\nu^{r_\beta}(z_M) = J_\nu(z_M)Y_\nu(r_\beta z_M) - J_\nu(r_\beta z_M)Y_\nu(z_M) = 0. \quad (3.19)$$

Für jede Werte von $\nu(L)$ und r_β erhält man die entsprechenden z_M als die s -te Nullstelle ($z_{L,s}^{r_\beta}$) der Quantisierungsbedingungsfunktion $Q_\nu^{r_\beta}(z_M)$. Die Quantenzahl s gibt somit die Anzahl der Knoten der Wellenfunktion in β an für die gilt, dass β echt größer als β_{min} ist. Dies bedeutet beispielsweise, dass die Grundzustandswellenfunktion, die nur einen Wellenbauch hat, eine s -Quantenzahl von 1 hat (0_1^+). Letztendlich erhält man als normierte Eigenfunktionen

$$\xi(\beta) = c_{L,s} \beta^{-3/2} \left[J_\nu(z_{L,s}^{r_\beta} \frac{\beta}{\beta_{max}}) + \gamma_Y Y_\nu(z_{L,s}^{r_\beta} \frac{\beta}{\beta_{max}}) \right] \quad (3.20)$$

mit den Eigenwerten

$$E_{L,s} = \frac{\hbar^2}{2B\beta_{max}^2} (z_{L,s}^{r_\beta})^2 \quad (3.21)$$

und der Normierung

$$\frac{1}{c_{L,s}^2} = \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \beta^4 [\xi(\beta)]^2 d\beta. \quad (3.22)$$

Der Parameter $2B\beta_{max}^2$ in Gleichung 3.21 definiert die Energieskala. In den Abbildungen 3.6 und 3.7 kann man die Potenziale der X(5)-Lösung und der CBS-Lösung sehen. Eingezeichnet sind hier auch die quadrierten Wellenfunktionen des Grundzustands und des 0_2^+ Zustands in der Deformationsvariablen β . Quadrierte Wellenfunktionen stellen eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung dar. In einer quantenmechanisch korrekten Beschreibung eines Kerns wird dieser aus Überlagerungen von unterschiedlich deformierten Gestalten dargestellt. Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung gibt somit an, welche Deformationsgestalt mit welcher Wahrscheinlichkeit auftritt.

3.6 Nachweis einer β -Vibration mit dem CBS-Modell?

Das Confined β -Soft Rotor Modell beschreibt die Energien der Grundzustandsbande sowie deren E2-Übergangsstärken von Kernen im Bereich zwischen X(5) Kernen und dem Rigid Rotor Limit erfolgreich [2, 3]. Im Rahmen dieser Arbeit und [6, 7] wurden theoretische Rechnungen mit dem CBS-Modell auch für E0-Übergänge gemacht. Ein weiterführendes Ziel ist es nun, die experimentell ermittelten E0-Übergangsstärken $\rho^2(E0)_{exp}$ mit den CBS-Voraussagen der E0-Übergangsstärke $\rho^2(E0)_{CBS}$ zu vergleichen. Eine hohe Übergangsstärke wäre ein Hinweis auf eine β -Vibration, also eine Schwingung der Kernmaterie um eine deformierte Gleichgewichtsform. Um den Begriff der β -Vibration zu verstehen, sollte man sich einmal die Eigenschaften des 0_2^+ Zustands und den Unterschied dieses Zustands im Vergleich zum Grundzustand im CBS-Modell klarmachen. Die Grundzustandswellenfunktion kann man sich als einen gaußähnlichen Peak in der Deformationsvariablen β vorstellen. Geht man zu höheren Drehimpulsen in der Grundzustandsbande, so verschiebt sich dieser Peak nur zu höheren Deformationen und man erhält eine auf dem Grundzustand aufgebaute Rotationsbande.¹

Diese gaußähnliche Form der Wellenfunktion lässt allerdings keine Vibration zu. Vibrationszustände verändern die Gestalt und brauchen somit mindestens einen Knoten in der Wellenfunktion in β . Der 0_2^+ Zustand ist ein angeregter Zustand und in der CBS Wellenfunktion hat er genau einen Knoten. Dies erklärt, warum dieser Zustand als β -Vibration bezeichnet wird. Solche Vibrationszustände sind im allgemeinen durch hohe Übergangsstärken (E2 und E0) in die Grundzustandsbande gekennzeichnet, und aus Abbildung 3.5 sieht man, dass die mit 39(2) W.u. ermittelte $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Stärke [5] groß ist. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, dass die E0-Übergangsstärke in ^{150}Nd vom 0_2^+ Zustand in den Grundzustand ebenfalls einem großen Wert entspricht.

¹ Durch die Verschiebung der Wellenfunktion zu höheren Deformationen bei steigendem Drehimpuls kann man übrigens das *Centrifugal stretching* erklären.



4 ($E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+$)-Übergänge im CBS-Modell

Dass das CBS-Modell Energien und B(E2)-Übergangsstärken sehr gut beschreiben kann, wurde bereits an einigen Kernen experimentell verifiziert [2, 3]. Doch wie sieht das mit den B(E0)-Übergangsstärken bzw.: $\rho^2(E0)$ aus? Hier wurden bereits theoretische Untersuchungen gemacht [6, 7]. Da es im Institut für Kernphysik einen supraleitenden Elektronenlinearbeschleuniger gibt, möchte man nun experimentell die Aussagekraft des CBS-Modells in Bezug auf E0-Übergangsstärken überprüfen. Mittels elastischer Elektronenstreuung lässt sich die Grundzustandsladungsdichte messen, aber elastische Elektronenstreuung an einem angeregten Kern ist nicht möglich. Daher werden in dieser Arbeit Übergangsladungsdichten mit Hilfe des CBS-Modells bestimmt, die man mit inelastischer Elektronenstreuung messen kann und aus denen man die E0-Übergangsstärken bestimmen kann.

4.1 $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken im CBS-Modell

Wie schon im einleitenden Teil erwähnt wurde, ist man mit dem CBS-Modell in der Lage, absolute E0-Übergangsstärken vorauszusagen[6]. Der E0-Übergangsoperator $T(E0)$ ist in den in Kapitel 3 eingeführten kollektiven Variablen folgendermaßen definiert:

$$T(E0) = \frac{3}{5} Z e R_0^2 \left(1 + \frac{5}{4\pi} \sum_{\mu} |a_{2\mu}|^2 \right) \quad (4.1)$$

Die Übergangsstärke lässt sich dann aus dem Matrixelement

$$\langle \xi_{final} | T(E0) | \xi_{initial} \rangle \quad (4.2)$$

berechnen. Man kann leicht zeigen, dass sich der Operator aufgrund der Orthogonalität der Zustände ξ_i und ξ_f und unter Verwendung der Relationen (3.3) und (3.4) vereinfachen lässt zu:

$$T(E0) = \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta^2 \quad (4.3)$$

Es ist üblich, E0-Übergangsstärken in der dimensionslosen Größe

$$\rho^2(E0) = \frac{|\langle \xi_f | T(E0) | \xi_i \rangle|^2}{e^2 R_0^4} = \left(\frac{3Z}{4\pi} \right)^2 |\langle \xi_{final} | \beta^2 | \xi_{initial} \rangle|^2 \quad (4.4)$$

in der Einheit 10^{-3} anzugeben. Für das Isotop ^{150}Nd wurde hier eine Übergangsstärke von $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+) = 110 \cdot 10^{-3}$ berechnet, was im Vergleich zu dem gleichen Übergang in ^{94}Mo einen sehr hohen Wert darstellt. Ließe sich dieser Wert experimentell bestätigen, wäre das ein großartiger Erfolg für die Aussagekraft des CBS-Modells. In den folgenden Unterkapiteln werden nun die CBS-Rechnungen im Hinblick auf ein solches Experiment zur Bestätigung der hohen E0-Übergangsstärke vorgestellt.

4.2 Untersuchungen der Dichteverteilungen

Ein wichtiger Teil dieser Arbeit wird die E0-Anregung vom Grundzustand in den 0_2^+ Zustand mit Hilfe von inelastischer Elektronenstreuung sein. Da bei Elektronenstreuung die einfallenden Elektronen an der Ladungsdichteverteilung des Kernes über die elektromagnetische Wechselwirkung gestreut werden, ist es notwendig zu wissen, wie die Ladungsdichteverteilungen der einzelnen Zustände aussehen. Für elastische Streuung ist hierbei die Ladungsdichte des Grundzustandes wichtig bzw. die Ladungsdichte des 0_2^+ Zustandes, während man für die inelastische Streuung eine sogenannte Übergangsladungsdichte benötigt, auf die später noch genauer eingegangen wird.

Eine der Annahmen, die zur Berechnung der Ladungsdichten mit Hilfe des CBS-Modells gemacht werden, ist die gleichmäßige Verteilung von Kernmaterie einer Deformationsgestalt bei einem festen β . Eine quantenmechanisch korrekte Beschreibung des Kernes bedeutet, dass die Kerngestalt durch eine quantenmechanische Überlagerung von verschiedenen Deformationsgestalten zusammengesetzt wird. Beim Versuch einen Formalismus zu entwickeln, der einen Ausdruck für Ladungsdichte und Übergangsladungsdichte bringt, ergibt sich folgende Schwierigkeit:

Die CBS-Wellenfunktionen, sowie das CBS-Potenzial sind in der Deformationsvariablen β parametrisiert, wohingegen ein Experiment nur im realen Ortsraum stattfindet. Das Ziel ist es nun, eine geeignete Transformation zu finden, in der man die CBS-Erwartungswerte und Observablen in den Ortsraum transformieren kann um sie dann direkt mit den Ergebnissen des Elektronenstreuexperimentes vergleichen zu können. Die quantenmechanisch korrekte Beschreibung des Kernes, nämlich eine Überlagerung unterschiedlich deformierter Gestalten ist nun der Schlüssel für eine Transformation vom Deformationsraum in den Ortsraum.

Es wird nun im folgenden die Annahme gemacht, dass eine bestimmte Deformationsgestalt (charakterisiert durch die Deformation $\beta = \beta_0$) eine homogene Ladungsdichte ρ_0 besitzt, die sich wie folgt bestimmen lässt:

$$\int_0^{R_0} \rho(r) dV = \rho_0 V = Z \cdot e \quad (4.5)$$

Da die Ladungsdichte in Formel (4.5) nicht vom Radius abhängt kann sie durch die konstante Ladungsdichte $\rho_0 = \frac{3Z \cdot e}{4\pi R_0^3}$ ersetzt werden. In Abbildung 4.2 werden solche Deformationsgestalten mit konstanter Ladungsdichte dargestellt. Unter Beachtung der Volumenerhaltung werden dann verschiedene Deformationsgestalten mit der gleichen konstanten Ladungsdichte, aber unterschiedlichen Deformationswerten β quantenmechanisch überlagert.

Um diese Überlagerung mathematisch zu formulieren, geht man davon aus, dass man für nur eine bestimmte Deformationsgestalt die partielle Wellenfunktion

$$d\Psi_\beta(\vec{r}) = \sqrt{\rho_\beta(\vec{r})} \cdot \xi^{CBS}(\beta) d\beta \quad (4.6)$$

erhält. Die Ladungsdichte ρ_β ist dann für diese Deformationsgestalt gegeben durch:

$$\rho_\beta(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0, & \text{innerhalb von } R_\beta(\theta, \phi) \\ 0, & \text{außerhalb,} \end{cases} \quad (4.7)$$

Gleichung (4.7) gibt nun an, dass sich eine Deformationsgestalt im Ortsraum zusammensetzt aus der Stufenfunktion, die durch die homogene Ladungsdichte in Gleichung (4.5) formuliert ist, multipliziert mit dem Gewicht der analytischen CBS Wellenfunktion $\xi^{CBS}(\beta)$. Möchte man nun die komplette Wellenfunktion im Ortsraum erhalten, muss man über alle auftretenden Deformationen β innerhalb der Grenzen β_{min} und β_{max} integrieren. Jede Deformationsgestalt wird dann mit dem Matrixelement der Wellenfunktionen in β gewichtet. Wichtig ist hier, dass das Volumenelement in der Deformationsvariablen β noch den Faktor β^4 beinhaltet (siehe Gleichung (4.8)), der bei den folgenden Rechnungen unbedingt berücksichtigt werden muss.

Ladungsdichten, oder allgemeiner ausgedrückt Übergangsladungsdichten, lassen sich im Ortsraum also wie folgt schreiben:

$$\rho(\vec{r}) = \langle \Psi(\vec{r}) | \Psi(\vec{r}) \rangle = \int d\Psi_\beta(\vec{r}) d\beta = \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \rho_\beta(\vec{r}) \cdot \xi_{final}^{CBS}(\beta) \cdot \xi_{initial}^{CBS}(\beta) \beta^4 d\beta. \quad (4.8)$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass man sich noch im intrinsischen System des Kernes befindet. Geht man von einer beliebigen Ausrichtung des Kernes im Raum aus, so muss über den gesamten Raumwinkel integriert werden und man erhält letztendlich den Ausdruck:

$$\rho_T(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \rho(\vec{r}) \sin \theta. \quad (4.9)$$

Diese Übergangsladungsdichte hängt nun nicht mehr vom Radiusvektor $\vec{r}$ ab, sondern ist eine Mittelung über alle Ausrichtungen und kann als Abhängigkeit vom Betrag des Radius r geschrieben werden. Nun ist man in der Lage mit Hilfe des CBS Modells verschiedene Ladungsdichten und deren Übergangsladungsdichten im Ortsraum zu beschreiben.

4.3 Berechnete Ladungsdichteverteilungen in ^{150}Nd

Für die Berechnung der Ladungsdichteverteilungen mit Hilfe des CBS-Modells wurde das Computeralgebrasystem Mathematica verwendet und die nötigen Gleichungen implementiert. Tabelle 4.1 zeigt eine Zusammenstellung der Werte, die für die Ausführung des Computercodes benötigt wurden.

r_β	0.087
β_{max}	0.518
$R_0 = 1.2 fm \cdot 150^{1/3}$	6.38 fm
ρ_0	0.05526 e/fm ³

Tabelle 4.1: Wichtige Werte zur Berechnung der Ladungsdichteverteilungen in ¹⁵⁰Nd

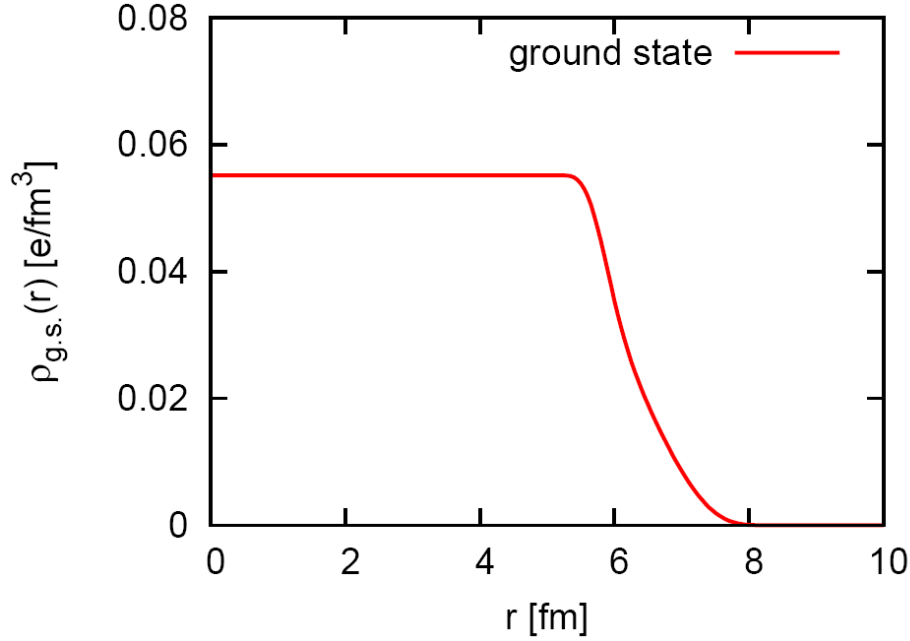


Abbildung 4.1: Theoretisch erwartete Grundzustandsladungsdichte von ¹⁵⁰Nd (über alle Ausrichtungen gemittelt)

4.3.1 Ladungsdichte des Grundzustands

Die Berechnung der Grundzustandsladungsdichte ist nun relativ einfach, da hier $\xi_{initial}^{CBS}(\beta)$ und $\xi_{final}^{CBS}(\beta)$ gleich sind und der Grundzustandswellenfunktion entsprechen. Für die Berechnung der in Abbildung 4.1 dargestellten Grundzustandsladungsdichte wurde bereits über alle räumlichen Ausrichtungen integriert. Man erhält eine Ladungsdichteverteilung, wie man sie aus dem elastischen Streuexperimenten mit dem Matrixelement $\langle 0_1^+ | T(E0) | 0_1^+ \rangle$ kennt. Im Kerninneren sieht man eine konstante Ladungsdichte und erst am Rand fällt diese innerhalb von 1-2 fm auf 0 ab. Somit ergibt sich allein aus der Annahme der quantenmechanischen Überlagerung verschiedener Deformationsgestalten eine diffuse Randladungsdichte. Abbildung 4.2 links zeigt die Grundzustandsladungsdichte, wie sie nur für die herausprojizierte Hauptsymmetrieachse (z-Achse) aussieht (siehe Gleichung 4.8). Man kann hier erkennen, dass die quadrierte Wellenfunktion (die Wahrscheinlichkeitsdichte) direkt mit der Steigung der Ladungsdichte zusammenhängt. Für die geringste Deformation β_{min} ist die Wahrscheinlichkeitsdichte gleich Null und die Ladungsdichte noch auf einem konstanten Wert, der einer Steigung von Null entspricht. Im Bereich des höchsten Wertes der Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt die Steigung in der Ladungsdichte ebenfalls den höchsten

Wert an. Für die maximale Deformation β_{max} sinkt die Ladungsdichte auf den konstanten Wert von 0 ab.

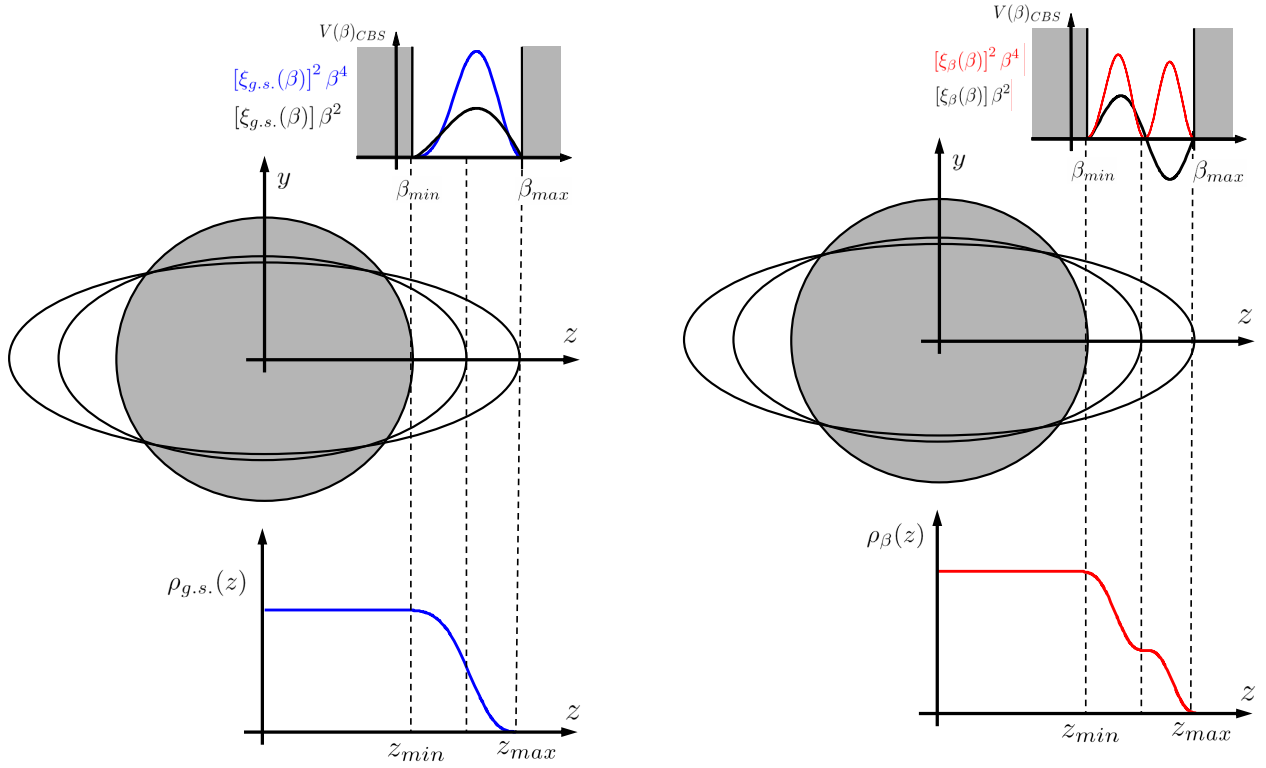


Abbildung 4.2: Anschauliche Erklärung der quantenmechanischen Überlagerung verschiedener Deformationsgestalten: links: für den Grundzustand, rechts: für den 0_2^+ Zustand in der β -Bande. Hierbei sind oben die Wellenfunktionen und die Wahrscheinlichkeitsdichten im CBS-Potenzial dargestellt, in der Mitte verschiedene Deformationsgestalten und unten eine daraus resultierende Ladungsdichte für den Kern.

4.3.2 Ladungsdichte des 0_2^+ Zustands in der β -Bande

Die sogenannte β -Bande zeichnet sich dadurch aus, dass der Radialteil der Wellenfunktion einen Knoten in der Mitte besitzt (siehe Abbildung 4.2 links oben). Diese Nullstelle in der Wellenfunktion kann im CBS-Modell direkt durch die Nullstelle der Besselfunktion beschrieben werden. Berechnet man nun das Quadrat der Wellenfunktion (Quantenzahlen für den Bandenkopf sind: $L = 0$, $s = 2$), so ergibt sich im Deformationsraum die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, wie sie in Abbildung 4.2 rechts gezeigt ist. Wie zuvor bei der Grundzustandsladungsdichte lässt sich auch hier von der Wahrscheinlichkeitsdichte auf die Ladungsdichte zurückschließen und man kann eine erstaunliche Entdeckung machen. Da die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der β -Bande aufgrund des Knotens eine verschwindende Wahr-

scheinlichkeit bei einer mittleren Deformation hat, erhält man in der Ladungsdichteverteilung einen Bereich konstanter Ladungsdichte im Randbereich des Ladungsdichteprofiles, wie man im rechten unteren Teil von Abbildung 4.2 sieht.

Leider lässt sich dieses Ladungsdichteprofil nicht experimentell mittels elastischer Elektronenstreuung mit $\langle 0_2^+ | T(E0) | 0_2^+ \rangle$ bestimmen, da das Target hierfür im angeregten Zustand $|0_2^+\rangle$ vorliegen müsste. Um also einen experimentellen Zugang zur β -Bande zu erhalten muss man inelastische Elektronenstreuung durchführen. Inelastische Streuung bedeutet, dass man sich im Falle des $(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangs die Übergangsladungsdichte zwischen Grund- und β -Bande anschaut.

4.3.3 Übergangsladungsdichte vom Grundzustand in den 0_2^+ Zustand

Zur Ermittlung der Übergangsladungsdichteverteilung im Ortsraum ist es nötig das Übergangsmatrixelement $\langle 0_2^+ | T(E0) | 0_1^+ \rangle$ zu berechnen. Der Übergangsladungsdichteoperator im Ortsraum ist einfach durch eine Deltafunktion $\hat{\rho}_{Op} = \delta(r)$ gegeben und man erhält:

$$\langle 0_2^+ | T(E0) | 0_1^+ \rangle = \int \Psi_{0_2^+}^*(\vec{r}') \delta(r') \Psi_{0_1^+}(\vec{r}') d^3 r' \quad (4.10)$$

Trägt man die Übergangsladungsdichte als Funktion des Radius auf, so ergibt sich der in Abbildung

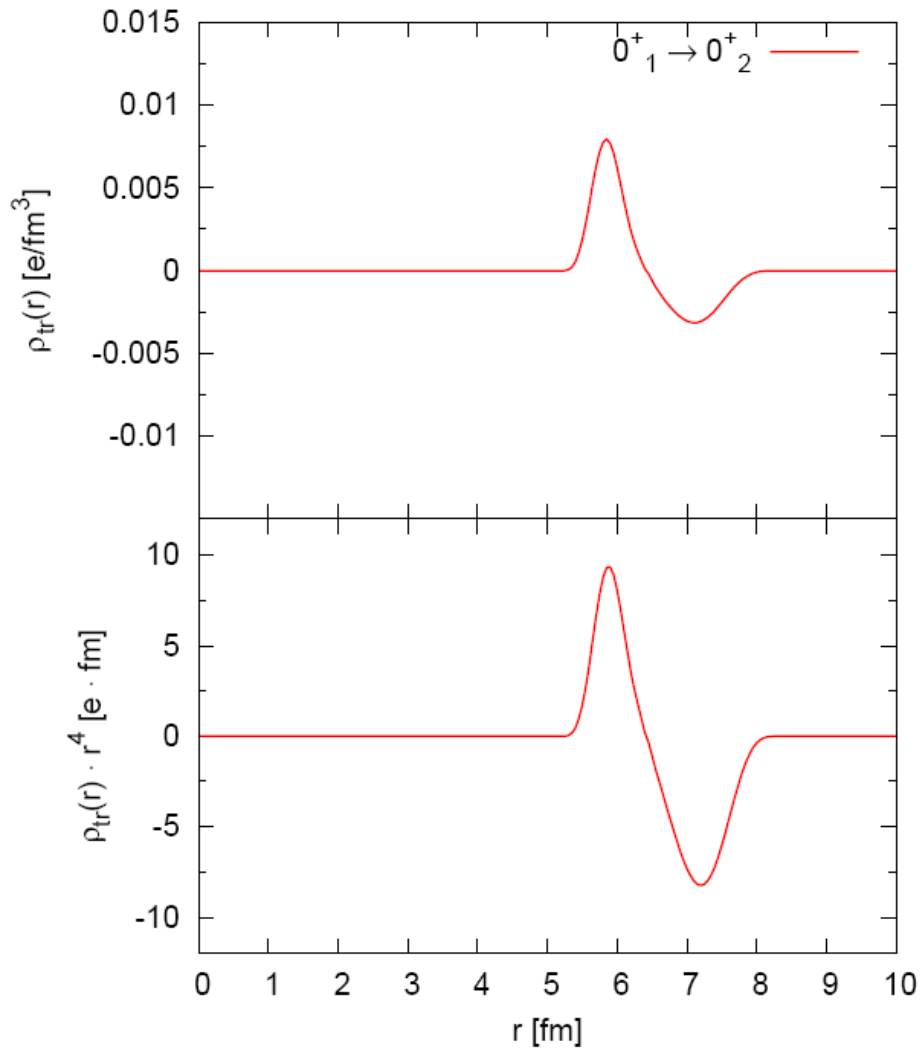


Abbildung 4.3: Theoretisch berechnete Übergangsladungsdichte für den Übergang $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$, sowie die mit r^4 skalierte Übergangsladungsdichte.

4.3 oben dargestellte Verlauf. Anschaulich ist die Übergangsladungsdichte der räumliche Überlapp der Anfangs- und Endzustandswellenfunktion im Ortsraum. Der in Abbildung 4.3 oben gezeigte Verlauf lässt sich folgendermaßen erklären: Alles was größer als der mittlere Gleichgewichtsradius von etwa 6.4 fm

ist, ist auf eine Längenänderung auf der z -Achse, bis hin zu einem Polarwinkel θ_0 zurückzuführen. Aufgrund der Volumenerhaltung ist dieser Winkel für jede Deformationsgestalt gleich. Bei Winkeln, die größer als θ_0 sind, ändert sich der Radius mit entgegengesetztem Vorzeichen im Vergleich zur z -Achse. Diese Beiträge kann man dann in der Übergangsladungsdichte links vom Nulldurchgang sehen. Ein Plausibilitätstest für diese Übergangsladungsdichte ist die Forderung, dass $\int \rho_T(r) r^2 dr = 0$ gelten muss, was eine numerische Integration bestätigt.

Abbildung 4.3 zeigt die Übergangsladungsdichte mit dem Faktor r^4 skaliert. Nach Gleichung (2.35) entspricht die Fläche unter der hier gezeigten Kurve gerade dem Monopolmatrixelement.

4.3.4 E0-Übergang in die $s=3$ Bande

Ein interessanter Aspekt, auf den hier nur kurz theoretisch eingegangen werden soll, ist die Behandlung des E0-Überganges vom Grundzustand in den 0_3^+ Zustand. Die $(s=3)$ -Bande kann man hier auch als sogenannte doppelte β -Bande bezeichnen. Analog zum E0-Übergang in die $(s=2)$ -Bande wurde hier wieder die Superposition stufenförmiger Ladungsdichten angenommen, aber diesmal wird das Matrixelement $\langle 0_3^+ | T(E0) | 0_1^+ \rangle$ ausgewertet. Die radiale Verteilung der Übergangsladungsdichte dieses Übergangs ist in Figur 4.4 gezeigt. Erwartungsgemäß hat man hier gleich zwei Nulldurchgänge, da die Wellenfunktion des 0_3^+ Zustandes in Abhängigkeit der Deformation β zwei Knoten aufweist.

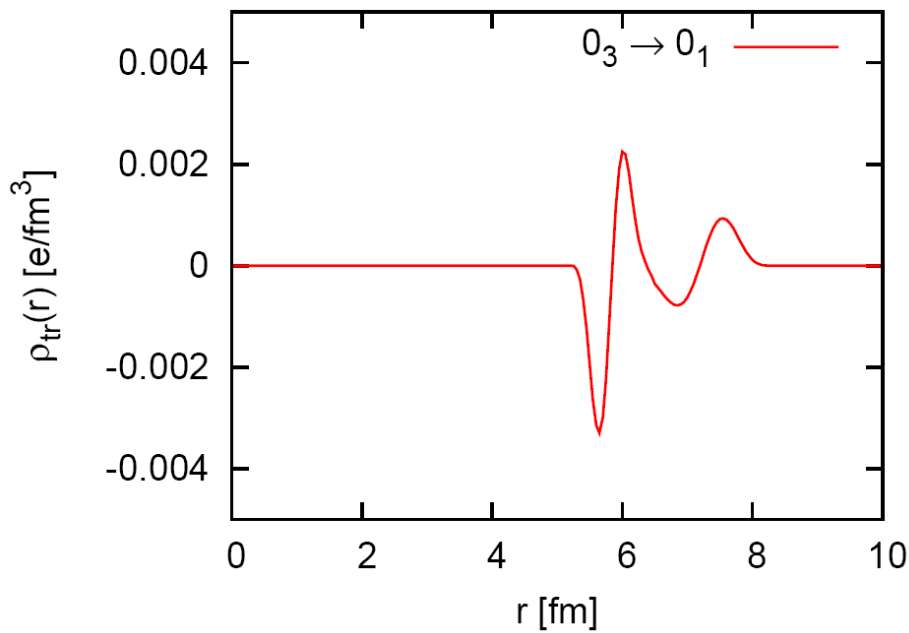


Abbildung 4.4: Mit Hilfe des CBS-Modells berechnete Übergangsladungsdichte vom Grundzustand in den 0_3^+ Zustand im Kern ^{150}Nd

5 Geplantes Elektronenstreuexperiment am S-DALINAC

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird gezeigt, dass man mit Hilfe der inelastischen Elektronenstreuung tatsächlich in der Lage ist, $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in schweren Kernen zu bestimmen. Um eine Abschätzung der geplanten Messdauer für das ^{150}Nd -Experiment machen zu können wurde hier ein Sensitivitätstest mit bereits vorhandenen Elektronenstreudaten durchgeführt. Dieser Test vermittelt, wie sensitiv man mit einer gemessenen Intensitäten der 0_2^+ Linie in einem Elektronenstreupektrum auf die Bestimmung von Übergangsstärken ist.

Dazu wurden Elektronenstreudaten verwendet, die im Spätsommer 2004 am Isotop ^{94}Mo [8] unter vier verschiedenen Streuwinkeln am LINTOTT Spektrometer aufgenommen wurden, und noch nicht hinsichtlich der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke untersucht wurden. Daraus wurde eine obere Grenze für den Wert $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ in ^{94}Mo bestimmt. Aus den daraus gewonnen Erkenntnissen wurde berechnet, wie lange unter welchen Winkeln gemessen werden muss um die Übergangsstärke $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ in ^{150}Nd zu messen. Außerdem sind die wichtigsten Daten des geplanten ^{150}Nd -Experiments zusammengefasst worden.

5.1 Sensitivitätstest: Obere Grenze für $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ in ^{94}Mo

Der Wert für $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ ist wie im Isotop ^{150}Nd experimentell noch nicht bestimmt worden. Daher benötigt man einen theoretischen Wert, der angibt wo man den experimentellen Wert vermutet. Eine Abschätzung des theoretischen Wertes für $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ in ^{94}Mo erhält man, wenn man sich den Verlauf der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in Mo-Isotopen anschaut.

5.1.1 Verlauf der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in Mo-Isotopen

Betrachtet man den Verlauf der bereits bekannten $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in den Mo-Isotopen in Abhängigkeit der Kernmassen, so stellt man zunächst fest, dass der Verlauf keine großen Sprünge aufweist. In Abbildung 5.1 sind die bereits bekannten $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Werte einiger Molybdän-Isotope gezeigt [19] und man kann einen glatten Verlauf der Kurve erkennen. Das Fragezeichen deutet die Stelle an, an der man nun die $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke in ^{94}Mo vermutet.

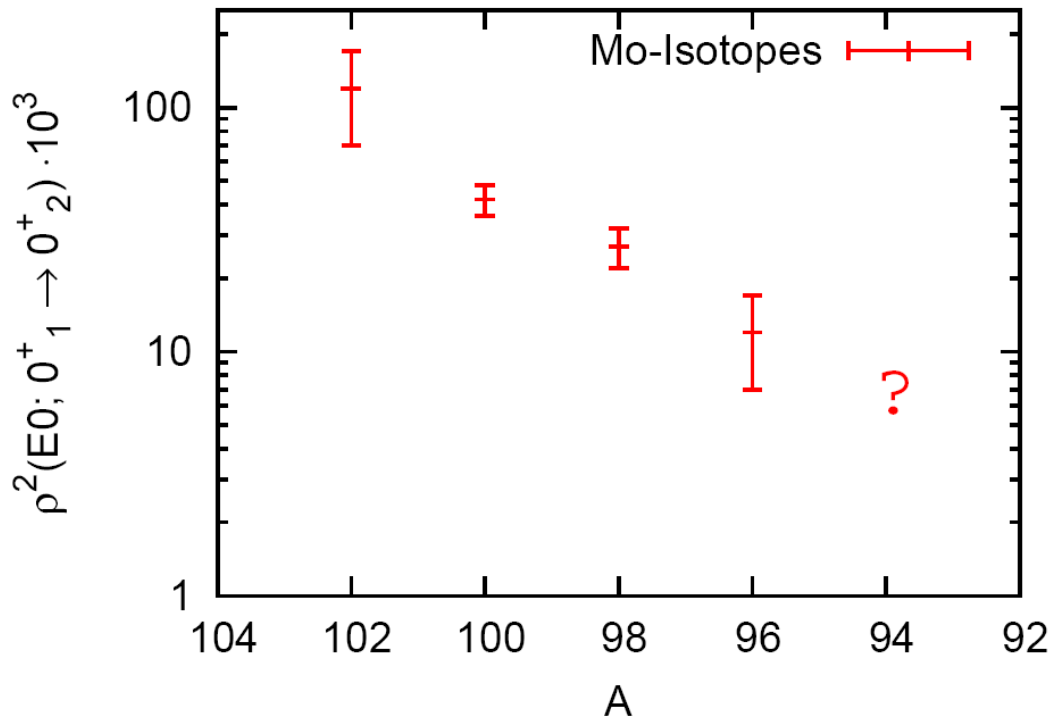


Abbildung 5.1: E0-Übergangsstärke in einigen Molybdän-Isotopen als Funktion der Massenzahl A. Die $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ wurden aus [19] entnommen.

5.1.2 Messungen

Im Anregungsenergiebereich bis etwa 4 MeV wurden Messungen unter vier verschiedenen Streuwinkeln bei einer Elektronenstrahlenergie von 70 MeV in ^{94}Mo durchgeführt. Sämtliche Messparameter sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Streuwinkel	Modus	Auflösung [keV]	Strahlstrom (μA)
93°	Disp.	40-80	0.5 - 2
117°	Disp.	40-80	0.5 - 2
141°	E-loss	30	0.5 - 2
165°	E-loss	30	0.5 - 2

Tabelle 5.1: Einige experimentelle Details des ^{94}Mo -Experiments bei einer Elektronenenergie von 70 MeV.

5.1.3 Spektren

Abbildung 5.2 zeigt die am LINTOTT-Spektrometer bei $E_0 = 70$ MeV aufgenommenen Spektren unter vier verschiedenen Impulsüberträgen. Die Spektren wurden auf die gesammelte Ladung normiert. Man kann jeweils links im Bild die elastische Linie sehen und sehr gut zu erkennen ist auch der 2_1^+ Zustand

(ein symmetrischer Einphonon-Zustand). Sehr schön zu erkennen ist auch, dass die elastische Linie mit steigendem Streuwinkel und somit steigendem Impulsübertrag, immer mehr unterdrückt wird. Das liegt daran, dass longitudinale Moden bei starken Rückwärtswinkeln ein Minimum haben, und somit im Vergleich zu den transversalen Moden unterdrückt werden.

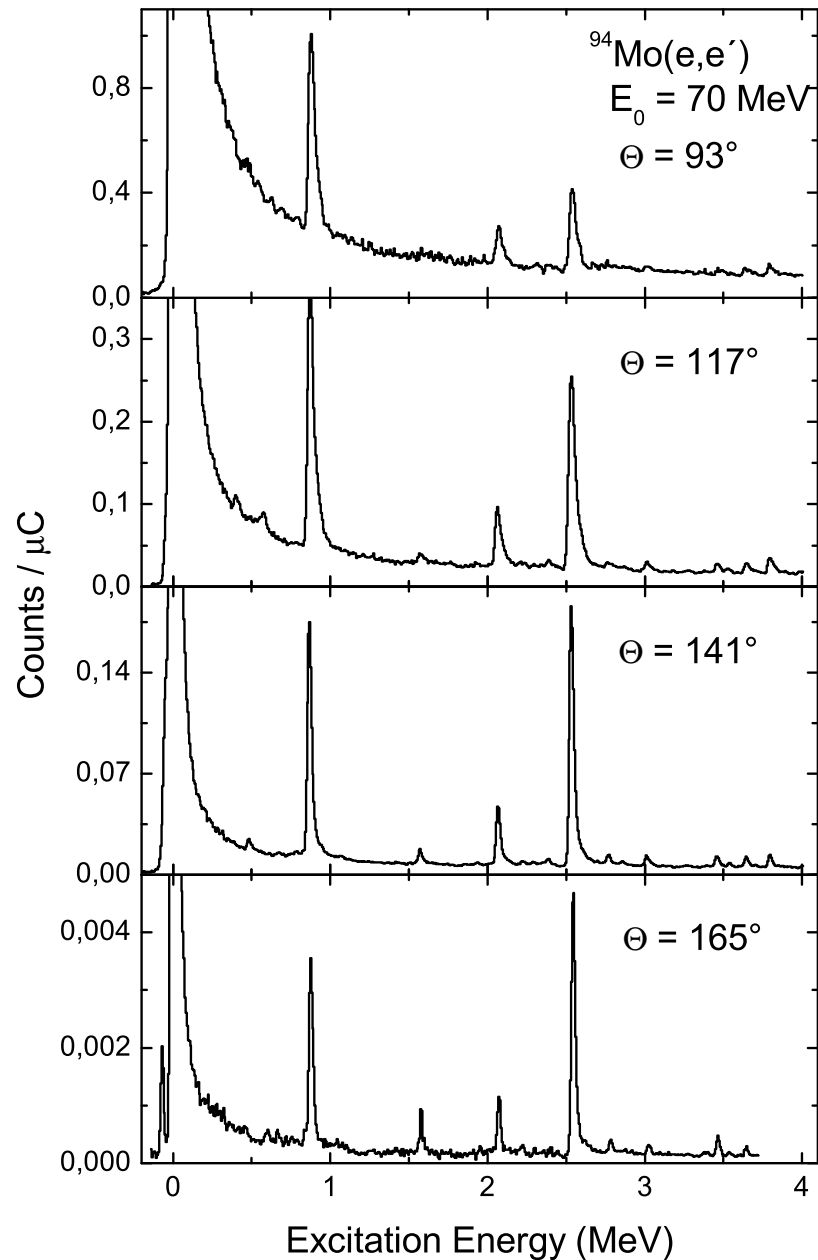


Abbildung 5.2: ^{94}Mo -Spektren unter vier verschiedenen Streuwinkeln.

5.1.4 0_2^+ Zustand in ^{94}Mo

Der bei 1742 keV liegende 0_2^+ Zustand ist schlecht in den Spektren erkennbar. Man kann in allen vier Spektren bei der richtigen Energie eine leichte Erhöhung des Untergrundes finden. Abbildung 5.3 zeigt exemplarisch die Stelle im im 93 Grad Spektrum, an der man den 0_2^+ Peak erwartet. Ebenso ist in dieser Abbildung der Untergrund angedeutet. Wenn man nun annimmt, dass dieser kleine Peak der 0_2^+ Zustand in ^{94}Mo ist, kann man nun daraus eine obere Grenze für die $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ Übergangsstärke in ^{94}Mo bestimmen.

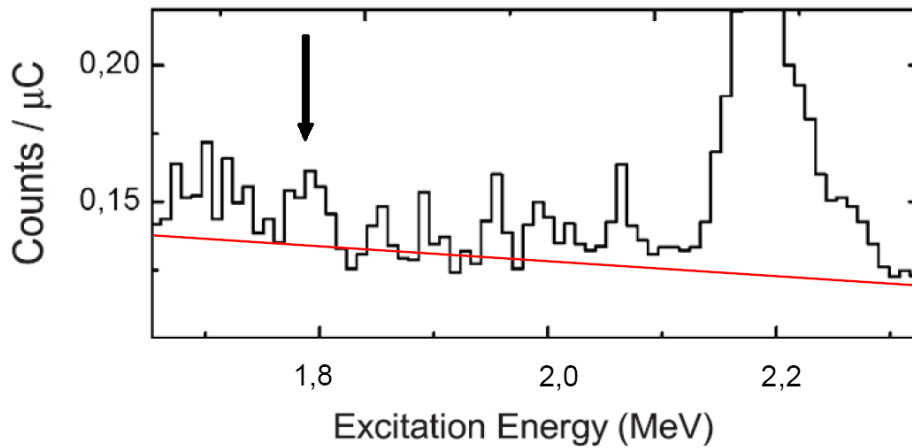


Abbildung 5.3: Ausschnitt des ^{94}Mo Spektrums, das unter einem Winkel von 93° aufgenommen wurde. Der Pfeil deutet auf den Peak, der als 0_2^+ Zustand interpretiert wurde.

5.1.5 Auswertung des Formfaktors

Wie schon in Kapitel 3 kann man auch hier das Programm PHASHI [17] benutzen um für das Targetmaterial ^{94}Mo einen elastischen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen. Tabelle 5.2 zeigt die hierfür berechneten Werte. Aus den Flächenverhältnissen der elastischen Linien und der Linien, die dem 0_2^+ Zustand zuge-

Streuwinkel θ	Elast. Wirkungsquerschnitt $[\frac{mb}{sr}]$	$ F(q) _{elast}^2$
93°	$7.87 \cdot 10^{-1}$	$1.99 \cdot 10^{-1}$
117°	$9.59 \cdot 10^{-2}$	$8.00 \cdot 10^{-2}$
141°	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$3.75 \cdot 10^{-2}$
165°	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$2.54 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 5.2: Mit PHASHI berechnete elastische Wirkungsquerschnitte und Formfaktoren für ^{94}Mo für eine Elektronenenergie von 70 MeV.

ordnet wurden, ließen sich dann nach Gleichung (2.40) die experimentellen inelastischen Formfaktoren

bestimmen, die in Tabelle 5.3 aufgeführt sind. Nun kann man diese Datenpunkte verwenden, um sie als

Streuwinkel θ	Impulsübertrag $[\frac{1}{fm}]$	$ F(q) _{inelast}^2$
93°	0.508	$4.66 \cdot 10^{-5}$
117°	0.597	$2.92 \cdot 10^{-5}$
141°	0.660	$8.16 \cdot 10^{-6}$
165°	0.694	$2.11 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 5.3: Abschätzung des Formfaktors für den 0_2^+ Zustand in ^{94}Mo bei einer Elektronenenergie von 70 MeV.

Funktion des Impulsübertrages darzustellen. Die Extrapolation zu $q = 0$ ermöglicht dann eine Bestimmung des Monopolmatrixelementes.

Figur 5.1.5 zeigt einen Plot der Datenpunkte aus dem ^{94}Mo -Experiment. Aus diesen Daten konnte letztendlich ein quadratischer Übergangsradius von $R_{tr}^2 = 35.0(57) fm^2$, sowie eine obere Grenze für die Monopolübergangsstärke von $\rho^2(E0) = 10.4 \cdot 10^{-3}$ gewonnen werden. Abbildung 5.5 zeigt die $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ Übergangsstärken in verschiedenen Molybdänisotopen, diesmal mit der oberen Grenze für den Wert im ^{94}Mo . Mit den in diesem Intensitätstest gewonnenen Erkenntnissen konnten nun Voraussagen für die Dauer des geplanten Elektronenstreuxperiments am ^{150}Nd getroffen werden, die im nächsten Unterkapitel zusammengefasst sind.

5.2 Geplantes ^{150}Nd -Experiment

Aufgrund der Untersuchungen und des Sensitivitätstest, der am ^{94}Mo -Isotop durchgeführt wurde, lässt sich nun eine Aussage über die Durchführbarkeit des ^{150}Nd -Experiments machen.

Die im vorigen Kapitel berechnete Übergangsladungsdichte vom Grundzustand in den bei 675 keV liegenden 0_2^+ Zustand in ^{150}Nd lässt sich nun mit Hilfe eines Fourier-Bessel-Analyse-Codes[15] in einen Formfaktor für ein Elektronenstreuxperiment transformieren. Der aus der theoretisch berechneten Übergangsladungsdichte bestimmte Formfaktor, also der auf den Mott-Wirkungsquerschnitt normierte inelastische Wirkungsquerschnitt, ist in Abbildung 5.6 in Abhängigkeit des Impulsübertrags dargestellt. Er wurde für eine Elektronenenergie von 65 MeV berechnet. Bei dieser Energie ist man mit den verfügbaren Streuwinkeln am LINTOTT-Spektrometer in der Lage, den Impulsübertrag so zu wählen, dass man über das erste Maximum des Formfaktors messen kann. Man sieht in Abbildung 5.6, dass das erste Maximum des Formfaktors bei etwas mehr als einem Impulsübertrag von $0.4 fm^{-1}$ liegt. Daher sind Messungen im Impulsübertragsbereich zwischen $0.4 fm^{-1}$ und $0.75 fm^{-1}$ geplant. Am LINTOTT-Spektrometer sollen daher Spektren im Winkelbereich zwischen 93° und 165° aufgenommen werden. In Tabelle 5.4 sind nochmal die wichtigsten Parameter der geplanten Messung zusammengefasst und Tabelle 5.5 gibt einen Überblick über die dafür abgeschätzte Messdauer. Die theoretisch bestimmte $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke in ^{150}Nd ist um eine Größenordnung höher, als der Wert, den man im ^{94}Mo als obere

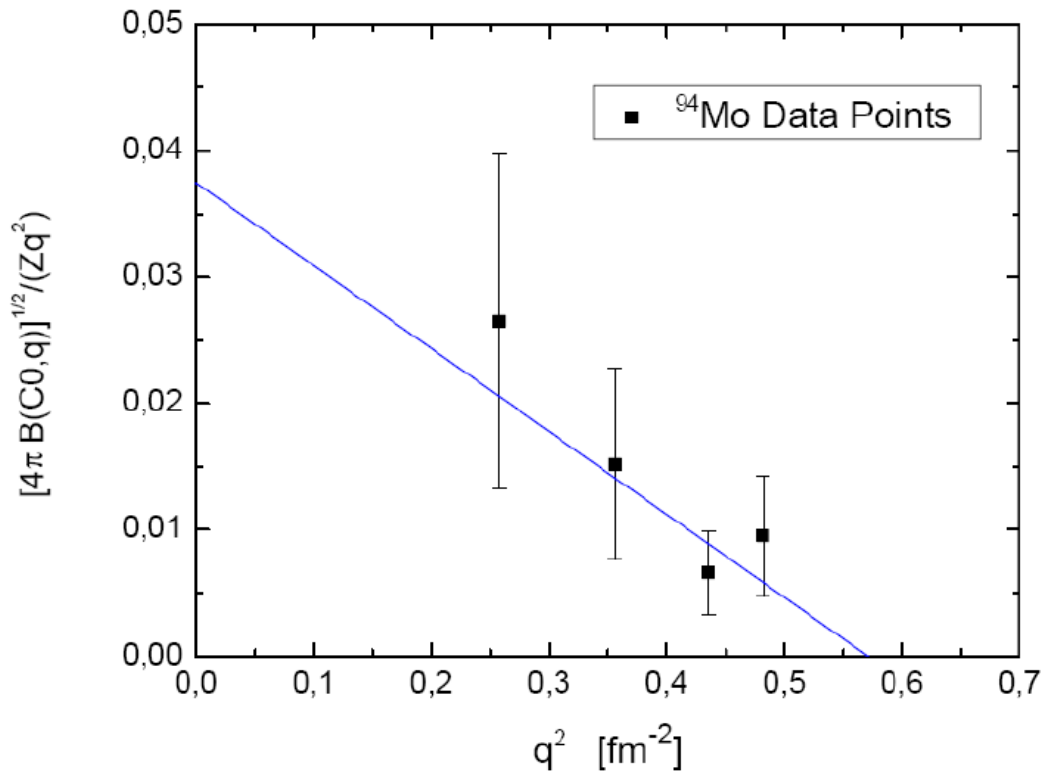


Abbildung 5.4: Extraktion des Monopolmatrixelementes in ^{94}Mo aus Elektronenstreudaten bei niedrigem Impulsübertrag. Die aus der hier dargestellten Extrapolation gewonnenen Daten sind ein quadratischer Übergangsradius von $R_{tr}^2 = 35.0(57) \text{ fm}^2$, sowie eine obere Grenze für die Monopolübergangsstärke von $\rho^2(E0) = 10.4 \cdot 10^{-3}$.

Grenze bestimmt hat. Geht man davon aus, dass man etwa 1000 Counts in einem Peak des 0_2^+ Zustandes haben möchte, kann man nun etwa eine vorläufige Messdauer abschätzen. Diese wird sich natürlich für jeden gewählten Spektrometerwinkel ändern, da bei 93° die erwartete Zählrate um einiges größer ist, als es bei extremen Rückwärtswinkeln wie beispielsweise bei 165° der Fall ist.

Zusammenfassend wird also ein Experiment bei einer Elektroneneinschussenergie von 65 MeV durchgeführt, damit man das erste Maximum des Formfaktors gut ausmessen kann. Ein realistisch erreichbarer Strahlstrom ist etwa $1 \mu\text{A}$. Voraussichtlich wird unter vier verschiedenen Winkeln gemessen (93° , 117° , 141° und 165°). Die geschätzten Messdauern, bis ein 0_2^+ Zustand gut im Spektrum zu erkennen ist, liegen dann bei etwa 2 Stunden für 93° bis hin zu 15 Stunden für 165° . Das bedeutet, dass mit einer guten Woche Strahlzeit am LINTOTT Spektrometer des S-DALINAC eine erfolgreiche Messung durchführbar ist.

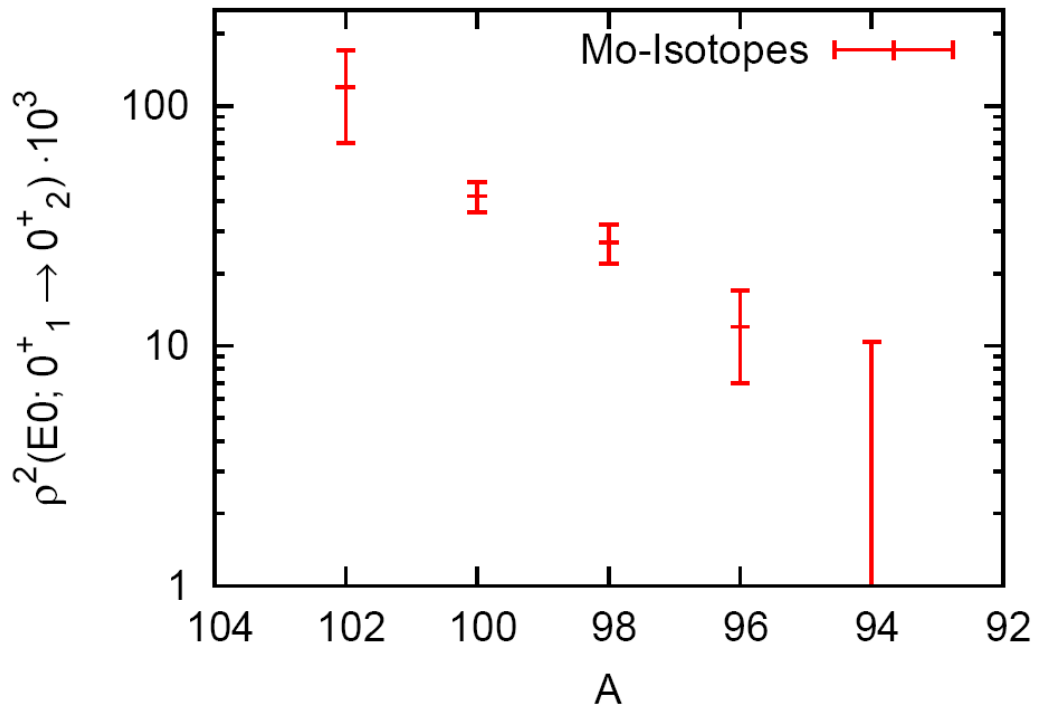


Abbildung 5.5: $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken in verschiedenen Molybdänisotopen mit der in dieser Arbeit bestimmten oberen Grenze für den Wert im ^{94}Mo .

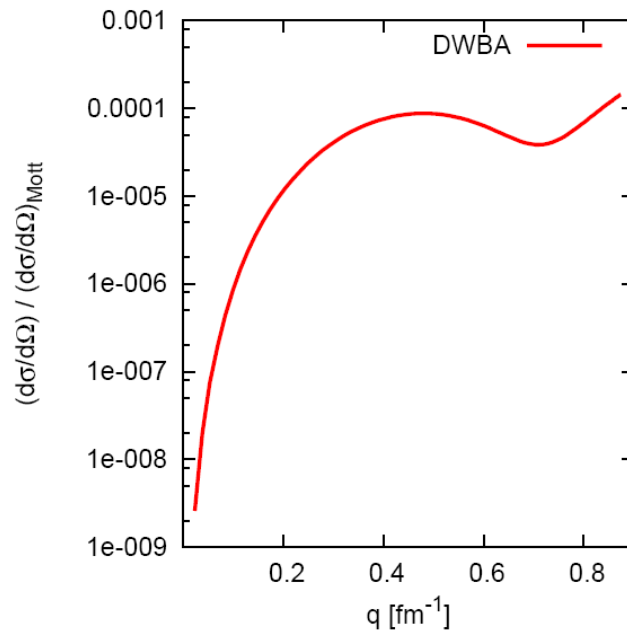


Abbildung 5.6: Theoretisch bestimmter Formfaktor des E0-Überganges für eine Elektroneneinschussenergie von 65 MeV.

Verwendetes Targetmaterial:	^{150}Nd
Zu bestimmende Größe:	$\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke
Zu untersuchender Zustand:	0_2^+ Zustand bei 675 keV
Targetdicke:	10 mg/cm^3
Elektronenenergie:	65 MeV
Energieauflösung:	25-30 keV (Energy-Loss)
Strahlstrom:	$1 \mu\text{A}$

Tabelle 5.4: Messparameter für das geplante Experiment am ^{150}Nd .

Streuwinkel θ	Impulsübertrag $[\frac{1}{fm}]$	Geschätzte Messdauer
93°	0.508	2 Stunden
117°	0.597	4 Stunden
141°	0.660	7 Stunden
165°	0.694	15 Stunden

Tabelle 5.5: Abschätzung der Messzeit für das geplante Experiment am ^{150}Nd .

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden mit dem geometrischen kollektiven Confined β -Soft Rotor Modell sehr große $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärken im Übergangsbereich zwischen der X(5)-Lösung und dem Rigid Rotor Limit berechnet. Speziell für den Kern ^{150}Nd wurde ein $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ von $110 \cdot 10^{-3}$ bestimmt. Zusammen mit der bereits experimentell belegten $B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ -Übergangsstärke von 39(2) W. u., ist das ein Hinweis auf eine kollektive β -Vibration des zu untersuchenden Kernes.

Zur experimentellen Bestätigung ist die Methode der inelastischen Elektronenstreuung am S-DALINAC ausgewählt worden. Hierzu wurde der nötige Formalismus der Elektronenstreuung bis hin zur Extraktion des Monopolmatrixelementes ausführlich hergeleitet. Im Hinblick auf ein Experiment am S-DALINAC zur Bestimmung der $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke in ^{150}Nd wurde mit Hilfe des CBS-Modells die Übergangsladungsdichte des E0-Übergangs berechnet und mittels einer Fourier-Bessel Analyse der Formfaktor des Übergangs extrahiert.

Um herauszufinden, wie sensitiv man mit inelastischer Elektronenstreuung auf E0-Übergänge ist, wurden alte Elektronenstreudaten von ^{94}Mo auf den gleichen E0-Übergang untersucht und erstmalig eine obere Grenze für das Monopolmatrixelement dieses Überganges bestimmt. Mit den hier gewonnenen Erkenntnissen zur Sensitivität wurde das Experiment am ^{150}Nd geplant und Messdauern abgeschätzt. Es wurde gezeigt, dass mit einem Aufwand von etwa einer Woche Strahlzeit, die $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$ -Übergangsstärke gemessen werden kann. Dieses Experiment wird im Rahmen einer anschließenden Dissertation am Institut für Kernphysik in Darmstadt durchgeführt werden.



Literaturverzeichnis

- [1] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **87**, 52502 (2001).
- [2] N. Pietralla and O.M. Gorbachenko, Phys. Rev. C **70**, 011304(R) (2004).
- [3] K. Dusling and N. Pietralla, Phys. Rev. C **72**, 011303(R) (2005).
- [4] A. Bohr, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk Selsk. 26, No. **14** (1952).
- [5] R. Krücken, et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 232501 (2002).
- [6] J. Bonnet, A. Krugmann, *et al.* eingereicht bei Phys. Rev. C.
- [7] J. Bonnet, Bachelorthesis, TU Darmstadt (2008).
- [8] O. Burda, Dissertation, TU Darmstadt (2007).
- [9] H.-D. Gräf, H. Miska, E. Spamer, O. Titze, and T. Walcher, Nucl. Instr. Meth. **153** 9 (1978).
- [10] T. Walcher, R. Frey, H.-D. Gräf, E. Spamer and H. Theissen, Nucl. Instr. Meth. **153** 17 (1978).
- [11] A. Richter, Operational Experience at the S-DALINAC, Proc. of the 5th EPAC, Eds. S. Myers, A. Pacheco, C. Petit-Jean-Genaz, J. Pool, IOP Publishing, Bristol 110 (1996).
- [12] A. Lenhard, Dissertation, TU Darmstadt (2004).
- [13] H. Theissen, *Spectroscopy of Light Nuclei by Low Energy (≤ 70 MeV) Inelastic Electron Scattering*, Springer Tracts in Modern Physics 65, 1 (1972)
- [14] H. Überall, *Electron Scattering from Complex Nuclei, Part A+B*, Academic Press (1971).
- [15] J. Heisenberg and H.P.Blok, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **33**, 569 (1983).
- [16] F. Neumeyer, Dissertation D17, TU Darmstadt (1997).
- [17] C. Bähr, Computercode PHASHI, TU-Darmstadt, unveröffentlicht.
- [18] C.W. de Jager, H. de Vries, and C. de Vries, At. Data Nucl. Data Tables **14** 479 (1974).
- [19] J.L. Wood, E.F. Zganjar, C. De Coster and K. Heyde, Nucl. Phys. **A651**, 323 (1999).
- [20] S. Strauch, Diplomarbeit, TH Darmstadt (1993).
- [21] F. Neumeyer, Diplomarbeit, TH-Darmstadt (1993).



Danksagung

Zunächst einmal möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Norbert Pietralla für die Bereitstellung des Themas und die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe am Institut für Kernphysik in Darmstadt bedanken. Weiterhin danke ich allen Arbeitskollegen für eine gute Zusammenarbeit und eine angenehme Arbeitsatmosphäre.

Außerdem möchte ich mich noch bei meiner Familie für die Unterstützung und nützlichen Ratschläge bedanken, ohne die eine solche Arbeit sicherlich nicht möglich gewesen wäre.

Diese Masterthesis ist im Rahmen des SFB634 der DFG entstanden.



Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterthesis selbstständig verfasst und keine weiteren Hilfsmittel, als die im Literaturverzeichnis angegebenen, verwendet habe.
