

INSTITUT FÜR KERNPHYSIK SFB 634

Andreas Krugmann

Untersuchung von E0-Übergängen in Kernen am Phasenübergang zwischen sphärischer und deformierter Kerngestalt

 ${\it Master thesis proposal}$

März 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung		3
2	Theorie		
	2.1	Kollektive Koordinaten	4
	2.2	Bohr-Hamiltonian	4
	2.3	Lösungsansatz für den Bohr-Hamiltonian	5
	2.4	Confined- β -Soft Rotor Modell (CBS)	6
	2.5	Wellenfunktionen im CBS-Modell	7
	2.6	Nachweis einer β -Vibration mit dem CBS-Modell?	8
3 E0-Übergang im CBS-Modell		Übergang im CBS-Modell	9
	3.1	E0-Übergangsstärken $\rho^2(E0)$ im CBS-Modell	9
	3.2	Untersuchungen der Dichteverteilungen	9
	3.3	Ladungsdichte am Grundzustand von $^{150}\mathrm{Nd}$	11
	3.4	Ladungsdichte der β -Bande	11
	3.5	Übergangsladungsdichten im CBS-Modell	13
4 Elektronenstreuexperiment am S-DALINAC		ktronenstreuexperiment am S-DALINAC	14
	4.1	Das LINTOTT Spektrometer am S-DALINAC	14
5	\mathbf{Zus}	ammenfassung und Ausblick	16

1 Einleitung

Zur physikalischen Beschreibung von Kernen am Formphasenübergang von Vibrationskernen zu prolat deformierten Kernen gab es in den letzten Jahren viele neue Erkenntnisse. Mit seinem X(5)-Modell[1] schlug Iachello im Jahre 2000 eine analytische Näherungslösung des Bohr-Hamiltonians vor. Als Potenzial wählte er ein unendlich hohes Kastenpotenzial in der Deformationsvariable β . Die aus dem Lösen der Schrödingergleichung resultierenden Wellenfunktionen sind Besselfunktionen erster Art, die in dem Potenzial zwischen $\beta = 0$ und $\beta = \beta_{max}$ eingeschränkt sind. Norbert Pietralla führte in seinem Confined- β -Soft Rotor Modell (CBS-Modell) [2] noch eine weitere Potenzialwand bei einer minimalen Deformation β_{min} ein. Somit ergibt sich als Wellenfunktion eine Superposition der Besselfunktionen erster und zweiter Art. Der Parameter $r_{\beta} = \beta_{min}/\beta_{max}$ beschreibt die Steifigkeit des Potenzials. Das CBS-Modell enthält als Grenzfälle für $r_{\beta} \to 0$ das X(5)-Modell und für $r_{\beta} \to 1$ den starren Rotor.

Im Rahmen dieser Arbeit sind mit dem CBS-Modell hohe $\rho^2(E0)$ -Übergangsstärken von der β -Bande in die Grundzustandsbande für den Kern ¹⁵⁰Nd berechnet worden. Solche hohen E0-Übergangsstärken sind Hinweise dafür, dass der Kern sogenannte β -Vibrationen, das sind Vibrationen um eine deformierte Gleichgewichtsform, durchführt. Elektronenstreuung ist aufgrund der Ortsauflösung ein ideales Hilfsmittel um Übergänge zwischen Kernzuständen experimentell untersuchen zu können, da man hier in der Lage ist, Ladungsdichten in Abhängigkeit des Radius zu bestimmen. Eine theoretische Beschreibung von Ladungsdichten und Übergangsladungsdichten, die mit Hilfe von CBS-Wellenfunktionen gemacht wurden werden vorgestellt und für den E0-Übergang $0_1^+ \rightarrow 0_{\beta}^+$ explizit ausgerechnet. Aus der Übergangsladungsdichte konnte man auf den theoretischen Formfaktor des Übergangs schließen. In der an dieses Masterthesisproposal anknüpfenden Masterthesis soll mit Hilfe von inelastischer Elektronenstreuung am S-DALINAC der experimentelle Formfaktor ermittelt werden. Abschließend soll ein Vergleich von Theorie und Experiment zeigen, wie aussagekräftig das CBS-Modell in Bezug auf E0-Übergänge und E0-Übergangsstärken ist.

In Kapitel 2 wird zunächst einmal der nötige theoretische Hintergrund zu dieser Arbeit erklärt. Sind die Grundlagen erst einmal bekannt, wird das Confined- β -Soft Rotor Modell erklärt, womit man dann in der Lage ist, verschiedene Observablen für ein geplantes Elektronenstreuexperiment zu berechnen. Kapitel 3 stellt die Rechnungen für E0-Übergangsstärken, Ladungsdichten und Übergangsladungsdichten vor, aus denen man die theoretischen Formfaktoren für das Elektronenstreuexperiment bestimmen kann. In Kapitel 4 wird letztendlich ein kleiner Ausblick auf das anstehende Experiment gegeben und die Voraussagen diskutiert. Die an dieses Masterthesisproposal anschließende Masterthesis wird dann im wesentlichen über dieses Experiment berichten.

2 Theorie

Im folgenden Kapitel werde ich die zur Anfertigung dieser Arbeit benötigten theoretischen Grundlagen erläutern und das Confined- β -Soft Rotor Modell vorstellen. Dieses Modell erlaubt mit einfachen Mitteln eine hervorragende Beschreibung von Kernen am Deformationsübergang von sphärischen Vibrationskernen zu prolat deformierten rotierenden Kernen.

2.1 Kollektive Koordinaten

Atomkerne bestehen im allgemeinen aus einer großen Anzahl von Protonen und Neutronen, die jeweils durch die Kernkräfte miteinander wechselwirken. Möchte man nun Kerne im Sinne eines geometrischen makroskopischen Modelles beschreiben, muss man sich von der Vorstellung vieler einzelner Nukleonen mit den Koordinaten x_i lösen und vielmehr zu einer kollektiven Beschreibung übergehen. Dafür wird üblicherweise ein Satz von Normalkoordinaten $\alpha_{\lambda\mu}$ verwendet, die man durch die Entwicklung der Oberfläche nach Kugelflächenfunktionen $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ erhält. Es gilt:

$$R(\theta,\phi) = R_0 \left[1 + a_{00}Y_{00} + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi) \right].$$
 (1)

 $R(\theta, \phi)$ beschreibt den Vektor von Mittelpunkt (Koordinatenursprung) zur Oberfläche. R_0 ist der Gleichgewichtsradius eines spärischen Kernes mit gleichem Volumen und kann durch $1.2 \cdot A^{1/3}$ fm genähert werden. Der Term $a_{00}Y_{00}$ dient der Volumenerhaltung, welche aufgrund der Inkompressibilität der Kernmaterie, die dem in dieser Arbeit verwendeten Modell zu Grunde liegt, gefordert werden muss. Die fünf Quadrupolkomponenten mit $\lambda = 2$ bilden einen vollständigen Koordinatensatz, der eine Oberflächenschwingung niedrigster Ordnung beschreibt. Parametrisiert man diesen Koordinatensatz geschickterweise so, dass die Hauptträgheitsachsen des Körpers mit den Koordinatenachsen übereinstimmen, verschwinden die Komponenten a_{21} und a_{12} und es gilt weiterhin:

$$a_{20} = \beta \cos \gamma \tag{2}$$

$$a_{22} = a_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma$$
 (3)

Hier sind β und γ die Quadrupoldeformationsparameter, die mit den drei Eulerwinkeln wieder einen vollständigen Koordinatensatz bilden. Die Variable β beschreibt eine axiale Deformation, der Parameter γ ist ein Maß für die Triaxialität des Kernes und die Eulerwinkel $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ beschreiben die Ausrichtung des deformierten Kernes im Raum. Die Abbildungen 1 bis 3 zeigen zuerst einen sphärischen Kern mit $\beta=0$, dann einen prolat deformierten Kern mit einem für die stabilen seltenen Erden realistischen Wert von $\beta=0.3$, sowie einen Kern mit $\beta=0.3$ und $\gamma=\pi/3$.

2.2 Bohr-Hamiltonian

Der Hamiltonoperator für einen durch Quadrupoldeformationsparameter beschreibbaren deformierten Kern wurde von Aage Bohr in den 50er Jahren des 20ten Jahrhunderts hergeleitet [3]. Er ging dabei von der Zusammensetzung der Energie in einen kinetischen Term und einen Potenzialterm aus, wobei der kinetische Term nochmals in einen Vibrationsteil und einen Rotationsteil aufgespalten werden kann.

$$H_{Bohr} = T + V = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma) \tag{4}$$



$$H_{Bohr} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial\gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_k \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (5)$$

Das Potenzial $V(\beta, \gamma)$ hängt selbstverständlich vom verwendeten Kernmodell ab.

2.3 Lösungsansatz für den Bohr-Hamiltonian

Der Bereich in der Nuklidkarte, der für die in dieser Arbeit untersuchten Kerne beschränkt sich zunächst einmal auf gerade-gerade-Kerne der seltenen Erden im Massenbereich von A = 150, wo es einen sogenannten Formphasenübergang gibt. Auf der linken Seite der Abbildung 4 sieht man



Abb. 4: Potenzialentwicklung im Gebiet des Formphasenüberganges

das Potenzial eines sphärischen Vibrationskernes, wie man es in der Nähe eines Schalenabschlusses erwarten würde. Erhöht man die Anzahl der Valenznukleonen und durchquert somit das für diese Arbeit interessante Gebiet des Formphasenüberganges, so bildet sich im Potenzial ein ausgeprägtes Minimum bei einer bestimmten Deformation β aus und man nähert sich dem Grenzfall des starren Rotors (siehe Abbildung 4 rechts).

Im Jahr 2000 veröffentlichte Iachello einen analytischen Lösungsansatz [1] zum Bohr-Hamiltonian. Er verwendete als Potenzialansatz ein unendlich hohes Kastenpotenzial in der Deformationsvariablen β , was in Abbildung 4 in der Mitte dargestellt ist, und unter dem Namen X(5)-Modell [1]

2 THEORIE

bekannt wurde. Vorteile dieses Lösungsansatzes sind die analytischen Lösungen der Wellenfunktionen in Form von Besselfunktionen erster Art und die Tatsache, dass es sich um ein parameterfreies Modell handelt. Ein Kern, der gut mit dem X(5)-Modell beschrieben werden kann, ist ¹⁵⁰Nd. Hier werden die Grundzustandsenergien und die B(E2)-Übergangsstärken sehr gut reproduziert [4]. Abbildung 5 zeigt einen Vergleich der Energien und B(E2)-Übergangsstärken der Grundzustandsbande (s=1) und der β -Bande (s=2) von ¹⁵⁰Nd mit der Voraussage des X(5)-Modells.



Abb. 5: Vergleich der Energien und E2-Übergangsstärken des Kernes ¹⁵⁰Nd mit dem X(5)-Modell
[4]

2.4 Confined- β -Soft Rotor Modell (CBS)

Iachello geht in seinem X(5)-Modell von einem unendlich hohen Kastenpotenzial in der Deformationsvariablen β aus, mit den Potenzialwänden für $\beta = 0$ und bei einem maximalen β_{max} (vergleiche Abbildung 6). Pietralla ging im Jahr 2004 in der Formulierung seines CBS Rotor Modells [2] noch einen Schritt weiter, indem er nicht nur die maximale Deformation eingrenzt, sondern auch noch einen inneren Potenzialwall bei β_{min} einführt. Die Wellenfunktionen in β sind nun zwischen dem Deformationswerten β_{min} und β_{max} begrenzt (confined). Führt man nun den Strukturparameter

$$r_{\beta} = \frac{\beta_{min}}{\beta_{max}} \tag{6}$$

ein, so ist man in der Lage einen ganzen Bereich von Kernen um den Formphasenübergang in der Gegend von N=90 zu beschreiben. Signaturen für Kerne, die sich mit dem CBS-Modell beschreiben lassen sind unter anderem ein $R_{4/2}$ -Verhältnis zwischen 2.9 (für X(5)-Kerne) bis hin zu 3.33 (für den starren Rotor). Das $R_{4/2}$ -Verhältnis gibt das Energieverhältnis des 4⁺-Zustands zu dem 2⁺-Zustand aus der Grundzustandsbande an. Abbildung 7 zeigt das CBS-Potenzial exemplarisch für den Wert $r_{\beta} = 0.3$.



Abb. 6: X(5)-Potenzial mit den quadrierten Wellenfunktionen der Grundzustandsbande und der β -Bande



Abb. 7: CBS-Potenzial mit den quadrierten Wellenfunktionen der Grundzustandsbande und der β -Bande

2.5 Wellenfunktionen im CBS-Modell

Um einen analytischen Ausdruck für die Wellenfunktion eines Zustands zu erhalten, muss nun eine Lösung der Schrödingergleichung gesucht werden.

$$H_{Bohr}\Psi = E\Psi \tag{7}$$

Für axialsymmetrische prolat deformierte Kerne, wie man sie in der Region dieses Formphasenüberganges vorliegen hat, wird nun die Näherung gemacht:

$$V(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma) \tag{8}$$

Diese Separation in einen β - und einen γ -abhängigen Teil des Potenzials ist gerechtfertigt, da die Kerngestalt nährungsweise durch $\gamma \approx 0^{\circ}$ beschrieben werden kann, also weitestgehend unabhängig von dieser Variablen ist. Man lässt in dieser Formulierung höchstens minimale Fluktuationen von γ um $\gamma = 0$ zu und setzt als Gesamtwellenfunktion an:

$$\Psi(\beta,\gamma,\theta_i) = \xi_L(\beta)\eta_K(\gamma)D_{M,K}^L(\theta_i),\tag{9}$$

wobei hier η einen harmonischen Oszillator in γ beschreibt, D die Wigner Funktionen mit den Eulerwinkeln θ_i sind und ξ die Wellenfunktion in der Deformationsvariablen β ist, die wir nun berechnen wollen.

Aus Gleichung 7 kann man eine 'radiale' Schrödingergleichung, die nur von β abhängt separieren, und man kommt auf:

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{3\beta^2} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = E\xi_L(\beta).$$
(10)

Führt man nun eine Variablentransformation durch und setzt:

$$z = \sqrt{\frac{E}{\frac{\hbar^2}{2B}}}\beta,\tag{11}$$

sowie

$$\widetilde{\xi}(z) = \beta(z)^{\frac{3}{2}} \xi_L(\beta(z)), \tag{12}$$

so kommt man schließlich auf eine Bessel-Differenzialgleichung.

$$\widetilde{\xi}'' + \frac{\widetilde{\xi}'}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\widetilde{\xi} = 0.$$
(13)

Die Lösungen dieser Differenzialgleichung ist eine Überlagerung von Besselfunktionen erster Art $(J_{\nu}(z))$ und zweiter Art $(Y_{\nu}(z))$ mit irrationaler Ordnung $\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}}$. Man erhält:

$$\widetilde{\xi}_{\nu}(z) \propto J_{\nu}(z) + \gamma_Y Y_{\nu}(z).$$
 (14)

Hierbei steht γ_Y für die relative Amplitude der Besselfunktion $Y_{\nu}(z)$. Um die Randbedingungen (Wellenfunktion wird Null an den Potenzialwänden) zu erfüllen, muss folgendes gelten:

$$\widetilde{\xi}_{\nu}(r_{\beta}z_M) = \widetilde{\xi}_{\nu}(z_M) \stackrel{!}{=} 0.$$
(15)

Hierbei ist $z_M = \sqrt{\frac{E}{\frac{h^2}{2B}}}\beta_{max}$. Aus den beiden Randbedingungen ergibt sich ein Ausdruck für die relative Amplitude der Besselfunktion der zweiten Art:

$$\gamma_Y = -\frac{J_\nu(r_\beta z_M)}{Y_\nu(r_\beta z_M)}.\tag{16}$$

Man erhält somit als Quantisierungsbedingung:

$$Q_{\nu}^{r_{\beta}}(z_M) = J_{\nu}(z_M)Y_{\nu}(r_{\beta}z_M) - J_{\nu}(r_{\beta}z_M)Y_{\nu}(z_M) = 0.$$
 (17)

Für jede Werte von $\nu(L)$ und r_{β} erhält man die entsprechenden z_M als die *s*-te Nullstelle $(z_{L,s}^{r_{\beta}})$ der Quantisierungsbedingungsfunktion $Q_{\nu}^{r_{\beta}}(z_M)$. Die Quantenzahl *s* gibt somit die Anzahl der Knoten der Wellenfunktion in β an für die gilt, dass β echt größer als β_{min} ist. Dies bedeutet beispielsweise, dass die Grundzustandswellenfunktion, die nur einen Wellenbauch hat, eine *s*-Quantenzahl von 1 hat (0_1^+) . Letztendlich erhält man als normierte Eigenfunktionen

$$\xi(\beta) = c_{L,s}\beta^{-3/2} \left[J_{\nu}(z_{L,s}^{r_{\beta}}\frac{\beta}{\beta_{max}}) + \gamma_Y Y_{\nu}(z_{L,s}^{r_{\beta}}\frac{\beta}{\beta_{max}}) \right]$$
(18)

mit den Eigenwerten

$$E_{L,s} = \frac{\hbar^2}{2B\beta_{max}^2} (z_{L,s}^{r_\beta})^2$$
(19)

und der Normierung:

$$\frac{1}{c_{L,s}^2} = \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \beta^4 \left[\xi(\beta)\right]^2 d\beta.$$
(20)

Der Parameter $2B\beta_{max}^2$ in Gleichung 19 definiert die Energieskala.

2.6 Nachweis einer β -Vibration mit dem CBS-Modell?

Das Confined- β -Soft Rotor Modell beschreibt die Energien der Grundzustandsbande sowie deren E2-Übergangsstärken erfolgreich. Im Rahmen dieser Arbeit wird untersucht, ob die sehr hohen E0-Übergangsstärken, die das Modell voraussagt, auch wirklich experimentell nachgewiesen werden können. Die Masterarbeit, die an dieses Masterthesisproposal anknüpft, wird sich dann hauptsächlich mit der Untersuchung des $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ E0-Übergangs im Kern ¹⁵⁰Nd mit Hilfe von Elektronenstreuung am Darmstädter Elektronenlinearbeschleuniger S-DALINAC beschäftigen. Ziel der Masterarbeit ist es dann, die experimentell ermittelten E0-Übergangsstärken $\rho^2(E0)_{Exp}$ mit den CBS-Voraussagen der E0-Übergangsstärke $\rho^2(E0)_{CBS}$ zu vergleichen. Eine hohe Übergangsstärke wäre unter anderem ein Hinweis auf eine β -Vibration, also eine Schwingung des Kernes um eine deformierte Gleichgewichtsform. Solche Vibrationszustände sind im allgemeinen durch hohe Übergangsstärken (E2 und E0) in die Grundzustandsbande gekennzeichnet, und aus Abbildung 5 sieht man, das die mit 39(2) W.u. ermittelte B(E2; $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$)-Stärke sehr groß ist.

3 E0-Übergang im CBS-Modell

Im nun folgenden Kapitel wird eine Beschreibung des E0-Übergangs vom 0⁺-Zustand der Grundzustandsbande in den 0⁺-Zustand der β -Bande gegeben. Zunächst einmal wird die E0 Übergangsstärke $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_{\beta}^+)$ theoretisch bestimmt. Daraufhin werden Rechnungen durchgeführt, die sich mit der Grundzustandsbande und im wesentlichen der Grundzustandsladungsdichte beschäftigen. Grundzustandsladungsdichten sind experimentell gut mit elastischer Elektronenstreuung zugänglich In einem weiteren Schritt wird die Ladungsdichte des 0⁺-Zustands der β -Bande untersucht, zu der es allerdings keinen direkten experimentellen Zugang geben kann, da es kein Target im angeregten 0_{β}^+ -Zustand für ein solches Experiment geben kann. In einem letzten Schritt wird gezeigt, wie man die Übergangsladungsdichte vom 0_{β}^+ -Zustand in den Grundzustand berechnen kann, die man mit inelastischer Elektronenstreuung messen kann. Aus der Übergangsladungsdichte lässt sich dann auch der theoretische Formfaktor des E0-Übergangs für ein Elektronenstreuexperiment berechnen.

3.1 E0-Übergangsstärken $\rho^2(E0)$ im CBS-Modell

Wie schon im einleitenden Teil erwähnt wurde, ist man mit dem CBS-Modell in der Lage, absolute E0-Übergangsstärken vorauszusagen[5]. Der E0-Übergangsoperator T(E0) ist in den in Kapitel 2 eingeführten kollektiven Variablen folgendermaßen definiert:

$$T(E0) = \frac{3}{5} ZeR_0^2 \left(1 + \frac{5}{4\pi} \sum_{\mu} |a_{2\mu}|^2 \right)$$
(21)

Der Übergang lässt sich dann aus dem Matrixelement

$$\left\langle \xi_{0^+_{\beta}} \left| T(E0) \right| \xi_{0^+_1} \right\rangle \tag{22}$$

berechnen. Man kann leicht zeigen, dass sich der Operator aufgrund der Orthogonalität der Zustände $\xi_{0_1^+}$ und $\xi_{0_a^+}$ und der Relationen (2) und (3) vereinfachen lässt zu:

$$T(E0) = \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta^2$$
(23)

Um E0 Übergangsstärken vergleichen zu können, ist es üblich, sie in der dimensionslosen Zahl

$$\rho^{2}(E0) = \frac{\left|\langle \xi_{f} | T(E0) | \xi_{i} \rangle\right|^{2}}{e^{2} R_{0}^{4}} = \left(\frac{3Z}{4\pi}\right)^{2} \left|\langle \xi_{final} | \beta^{2} | \xi_{initial} \rangle\right|^{2}$$
(24)

in der Einheit 10^{-3} anzugeben. Für das Isotop ¹⁵⁰Nd wurde hier eine Übergangsstärke von etwa $110 \cdot 10^{-3}$ berechnet, was einen sehr hohen Wert darstellt. Ließe sich dieser Wert experimentell bestätigen, wäre das ein großartiger Erfolg für die Aussagekraft des CBS-Modells. In den folgenden Unterkapiteln werden nun die CBS-Rechnungen im Hinblick auf ein solches Experiment zur Bestätigung der hohen E0-Übergangsstärke vorgestellt.

3.2 Untersuchungen der Dichteverteilungen

Eine der Annahmen des CBS-Modells ist die gleichmässige Verteilung von Kernmaterie. Es wird somit nicht zwischen dem Neutron- und Protonfreiheitsgrad unterschieden, sondern man betrachtet

eine Kernmaterie, die durch die Ladungs- und Massenzahl des jeweiligen Kernes gegeben sind. Die nun folgenden Rechnungen werden exemplarisch für den Kern¹⁵⁰Nd durchgeführt. Beim Versuch einen Formalismus zu entwickeln, der einen Ausdruck für Ladungsdichte und Übergangsladungsdichte bringt, ergibt sich folgende Schwierigkeit:

Die CBS-Wellenfunktionen, sowie das CBS-Potenzial sind in der Deformationsvariable β parametriesiert, wohingegen ein Experiment nur im realen Ortsraum stattfindet. Das Ziel ist es nun, eine geeignete Transformation zu finden, in der man die CBS-Erwartungswerte und Observablen in den Ortsraum transformieren kann um sie dann direkt mit den Ergebnissen des Elektronenstreuexperimentes vergleichen zu können.

Es wird nun im folgenden die Annahme gemacht, dass eine bestimmte Deformationsgestalt (charakterisiert durch die Deformation $\beta = \beta_0$ eine homogene Ladungsdichte ρ_0 besitzt, die sich wie folgt abschätzen lässt:

$$\int_{0}^{R_{0}} \rho(r)dV = Z \cdot e \tag{25}$$

Da die Ladungsdichte in Formel (25) nicht vom Radius abhängt kann sie durch die konstante Ladungsdichte $\rho_0 = \frac{3Z \cdot e}{4\pi R_0^3}$ ersetzt werden. Im Falle des in dieser Arbeit behandelten Kernes ¹⁵⁰Nd ergibt sich $\rho_0 = 0.05526 \frac{e}{fm^3}$. In den Abbildungen 9 und 10 werden in grau solche Deformationsgestalten mit konstanter Ladungsdichte dargestellt. Unter Beachtung der Volumenerhaltung werden dann verschiedene Deformationsgestalten mit der gleichen konstanten Ladungsdichte, aber unterschiedlichen Deformationswerten β quantenmechanisch überlagert.

Um diese Überlagerung mathematisch zu formulieren, geht man davon aus, dass man für nur eine bestimmte Deformationsgestalt die partielle Wellenfunktion

$$\delta\Psi_{\beta}(\vec{r}) = \sqrt{\rho_{\beta}} \cdot \xi^{CBS}(\beta) \tag{26}$$

erhält. Die Ladungsdichte ρ_{β} ist dann für diese Deformationsgestalt gegeben durch:

$$\rho_{\beta} = \begin{cases}
\rho_{0}, & \text{innerhalb von} R_{\beta}(\theta, \phi) \\
0, & \text{außerhalb}
\end{cases}$$
(27)

Gleichung (27) gibt nun an, dass sich eine Deformationsgestalt im Ortsraum zusammensetzt aus der Stufenfunktion, die durch die homogene Ladungsdichte in Gleichung (25) formuliert ist, multipliziert mit dem Gewicht der analytischen CBS Wellenfunktion $\xi^{CBS}(\beta)$. Möchte man nun die komplette Wellenfunktion im Ortsraum erhalten, muss man lediglich über alle auftretenden Deformationsgestalten innerhalb der Grenzen β_{min} und β_{max} integrieren. Jede Deformationsgestalt wird dann mit dem Matrixelement der Wellenfunktionen in β gewichtet. Wichtig ist hier, dass das Volumenelement in der Deformationsvariablen β noch den Faktor β^4 beinhaltet, der bei den folgenden Rechnungen unbedingt berücksichtigt werden muss.

Ladungsdichten, oder allgemeiner ausgedrückt Übergangsladungsdichten, lassen sich im Ortsraum also wie folgt schreiben:

$$\rho(\vec{r}) = \langle \Psi(\vec{r}) | \Psi(\vec{r}) \rangle = \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \rho_{\beta} \cdot \xi_{final}^{CBS}(\beta) \cdot \xi_{initial}^{CBS}(\beta) \beta^4 d\beta$$
(28)

Hierbei gilt es zu beachten, dass man sich noch im intrinsischen System des Kernes befindet. Geht man von einer beliebigen Ausrichtung des Kernes im Raum aus, so muss über den gesamten Raumwinkel integriert werden und man erhält letztendlich den Ausdruck:

$$\rho_T(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \rho(\vec{r}) \sin\theta$$
(29)

Diese Übergangsladungsdichte hängt nun nicht mehr vom Radiusvektor \vec{r} ab, sondern ist eine Mittelung über alle Ausrichtungen und kann als Abhängigkeit vom Betrag des Radius r geschrieben werden. Nun ist man in der Lage mit Hilfe des Confined- β -Soft Modelles verschiedene Ladungsdichten und deren Übergangsladungsdichten im Ortsraum zu beschreiben.

3.3 Ladungsdichte am Grundzustand von ¹⁵⁰Nd

Die Berechnung der Grundzustandsladungsdichte ist nun relativ einfach, da hier $\xi_{initial}^{CBS}(\beta)$ und $\xi_{final}^{CBS}(\beta)$ gerade gleich sind und der Grundzustandswellenfunktion entsprechen. Abbildung 9 zeigt



Abb. 8: Theoretisch erwartete Grundzustandsladungsdichte von ¹⁵⁰Nd (über alle Ausrichtungen gemittelt)

die Grundzustandsladungsdichte, wie sie nur für die herausprojizierte Hauptsymmetrieachse (z-Achse) aussehen würde (siehe Gleichung 28). Man kann hier erkennen, dass die quadrierte Wellenfunktion (die Wahrscheinlichkeitsdichte) direkt mit der Steigung der Ladungsdichte zusammenhängt. Für die geringste Deformation β_{min} ist die Wahrscheinlichkeitsdichte gleich Null und die Ladungsdichte noch auf einem konstanten Wert, der einer Steigung von Null entspricht. Im Bereich des höchsten Wertes der Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt die Steigung in der Ladungsdichte ebenfalls den höchsten Wert an. Für die maximale Deformation β_{max} sinkt die Ladungsdichte auf den konstanten Wert von 0 ab.

In Abbildung 8 wurde noch die Integration der Ladungsdichte über alle räumlichen Ausrichtungen vorgenommen (siehe Gleichung 29) und man erhält eine Ladungsdichteverteilung, wie man sie aus dem elastischen Streuexperimenten mit dem Matrixelement $\langle 0_1^+ | T_{(e,e')} | 0_1^+ \rangle$ kennt. Im Kerninneren sieht man eine konstante Ladungsdichte und erst am Rand fällt diese innerhalb von 1-2 fm auf 0 ab. Somit ergibt sich allein aus der Annahme der quantenmechanischen Überlagerung verschiedener Deformationsgestalten eine diffuse Randladungsdichte.

3.4 Ladungsdichte der β -Bande

Die sogenannte β -Bande zeichnet sich dadurch aus, dass der Radialteil der Wellenfunktion einen Knoten in der Mitte besitzt (siehe Abbildung 10 oben). Diese Nullstelle in der Wellenfunktion kann im CBS-Modell direkt durch die Nullstelle der Besselfunktion beschrieben werden. Berechnet man nun das Quadrat der Wellenfunktion (Quantenzahlen für den Bandenkopf sind: L = 0, s = 2), so ergibt sich im Deformationsraum die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, wie sie ebenfalls in Abbildung 10 gezeigt ist. Wie zuvor bei der Grundzustandsladungsdichte lässt sich auch hier von der Wahrscheinlichkeitsdichte auf die Ladungsdichte zurückschließen und man kann eine erstaunliche Entdeckung machen. Da die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der β -Bande aufgrund des



nen, Wahrscheinlichkeitsdichten, Deformations- tionen, Wahrscheinlichkeitsdichten, Deformatigestalten und Ladungsdichte in der Grundzu- onsgestalten und Ladungsdichte in der β -Bande standsbande im CBS-Modell

Abb. 9: Zusammenhang zwischen Wellenfunktio- Abb. 10: Zusammenhang zwischen Wellenfunkim CBS-Modell

Knotens eine verschwindende Wahrscheinlichkeit bei einer mittleren Deformation hat, erhält man in der Ladungsdichteverteilung einen Bereich konstanter Ladungsdichte im Randbereich des Ladungsdichteprofils, wie man im unteren Teil von Abbildung 10 sieht.

Leider lässt sich dieses Ladungsdichteprofil nicht experimentell mittels elastischer Elektronenstreuung mit $\left\langle 0_{\beta}^{+} \left| T_{(e,e')} \right| 0_{\beta}^{+} \right\rangle$ bestimmen, da das Target hierfür im angeregten Zustand $\left| 0_{\beta}^{+} \right\rangle$ vorliegen müsste. Um also einen experimentellen Zugang zur β -Bande zu erhalten muss man inelastische Elektronenstreuung durchführen. Inelastische Streuung bedeutet, man schaut sich die Übergangsladungsdichte zwischen Grund- und β -Bande an.

3.5 Übergangsladungsdichten im CBS-Modell

Zur Ermittelung der Übergangsladungsdichteverteilung im Ortsraum ist es nötig das Übergangsmatrixelement $\left\langle 0_{\beta}^{+} | T_{(e,e')} | 0_{1}^{+} \right\rangle$ zu berechnen. Der Übergangsladungsdichteoperator im Ortsraum ist einfach durch eine Deltafunktion $\hat{\rho}_{OP} = \delta(r)$ gegeben und man erhält:

$$\left\langle 0^{+}_{\beta} \left| T_{(e,e')} \right| 0^{+}_{1} \right\rangle = \int \Psi^{*}_{0^{+}_{\beta}}(\vec{r'}) \delta(r') \Psi^{-}_{0^{+}_{1}}(\vec{r'}) d^{3}r'$$
(30)

Plottet man die Übergangsladungsdichte als Funktion des Radius, so ergibt sich Abbildung 11.



Abb. 11: Theoretisch berechnete Übergangsladungsdichte für den Übergang $0^+_1 \to 0^+_\beta$

Anschaulich ist die Übergangsladungsdichte der räumliche Überlapp der Anfangs- und Endzustandswellenfunktion im Ortsraum. Der in Abbildung 11 gezeigte Verlauf lässt sich folgendermaßen erklären: Alles was größer als der mittlere Gleichgewichtsradius von etwa 6.4 fm ist, ist auf eine Längenänderung auf der z-Achse, bis hin zu einem Polarwinkel θ_0 zurückzuführen. Aufgrund der Volumenerhaltung ist dieser Winkel für jede Deformationsgestalt gleich. Bei Winkeln, die größer als θ_0 sind, ändert sich der Radius mit entgegengesetztem Vorzeichen im Vergleich zur z-Achse. Diese Beiträge kann man dann in der Übergangsladungsdichte links vom Nulldurchgang sehen. Ein Plausibilitätstest für diese Übergangsladungsdichte ist die Forderung, dass $\int \rho_T(r)r^2dr = 0$ gelten muss, was eine numerische Integration durchaus bestätigen kann.

4 Elektronenstreuexperiment am S-DALINAC

Die im vorigen Kapitel berechnete Übergangsladungsdichte lässt sich nun mit Hilfe einer Fourier Bessel Analyse in einen Formfaktor für ein Elektronenstreuexperiment transformieren. Bei Elektronenstreuexperimenten werden Elektronen der Energie E_0 auf ein in der Streukammer installiertes ruhendes Target (in dieser Arbeit: ¹⁵⁰Nd) geschossen. An den Targetkernen werden die Elektronen unter dem Streuwinkel θ gestreut und in einem Magnetspektrometer mit der Energie E_e nachgewiesen. Bei der Streuung kann der Targetkern um die Energie E_x angeregt werden, und zusätzlich dazu nimmt er noch einen Teil der Energie als Rückstoßenergie auf.

Man definiert üblicherweise den Impulsübertrag q als den Impuls, der vom Elektron auf den Targetkern unter dem Streuwinkel θ übertragen wurde. Es ergibt sich für q:

$$q = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{2E_0(E_0 - E_x)(1 - \cos\theta) + E_x^2}$$
(31)

Der Impulsübertrag ist somit abhängig vom Streuwinkel θ , der Einschussenergie E_0 , sowie der Anregungsenergie E_x . Wirkungsquerschnitte für Kernzustände kann man somit sehr übersichtlich in Abhängigkeit des Impulsübertrages angeben. Der aus der berechneten Übergangsladungsdichte bestimmte Formfaktor, also der auf den Mott-Wirkungsquerschnitt normierte inelastische Wirkungsquerschnitt, ist in Abbildung 12 in Abhängigkeit des Impulsübertrages dargestellt. Bei einigen Werten des Impulsübertrages sollen Anregungsspektren aufgezeichnet werden, wobei man aus dem Verhältnis der Fläche der elastischen Linie zur inelastischen Linie auf den Wert des Formfaktors schließen kann. Interpoliert man den Verlauf des Formfaktors bis hin zum Photonenpunkt, so lässt sich letztendlich ein Wert für die E0-Übergangsstärke $\rho^2(E0)$ abschätzen.



Abb. 12: Theoretisch bestimmter Formfaktor des E0-Überganges

4.1 Das LINTOTT Spektrometer am S-DALINAC

Seit 1991 ist am Institut für Kernphysik an der Technischen Universität Darmstadt der zweifach rezirkulierende Elektonenlinearbeschleuniger S-DALINAC[6] im Einsatz, der im Rahmen zahlreicher Diplom- und Doktorarbeiten aufgebaut wurde und beständig weiterentwickelt wird. Seine

supraleitenden 3 GHz-Kavitäten ermöglichen einen Elektronenstrahl mit Designwerten von einer Energie von 130 MeV und einem Strahlstrom von maximal 60 μ A. Verschiedene Messapparaturen (siehe Abbildung 13) sorgen für ein breites Spektrum an Experimenten zur Kernstrukturphysik. In der eigentlichen Masterarbeit wird ein Elektronenstreuexperiment am hochauflösenden 169°-Elektronenstreuspektrometer (LINTOTT-Spektrometer)[7] geplant. Tabelle 1 zeigt einige technische Details dieses Spektrometers und Tabelle 2 fasst kurz die wichtigsten experimentellen Details zusammen.



Abb. 13: Übersicht des Darmstädter Linear Elektronenbeschleunigers S-DALINAC mit einem Bild des hochauflösenden LINTOTT-Spektrometers

Impulsakzeptanz:	$\frac{\Delta p}{p} = \pm 2\%$
Raumwinkelakzeptanz:	$\Omega_{max} \approx 6msr$
Maximale Auflösung:	$3 \cdot 10^{-4} \text{ (FWHM)}$
Streuwinkelbereich:	$33^{\circ} - 165^{\circ}$ (12 Schritte)

Tabelle 1: Einige technische Details des hochauflösenden LINTOTT-Spektrometers.

Elektronenengie:	$65 { m MeV}$
Strahlstrom:	etwa 0.5 $\mu {\rm A}$
Zu untersuchende Linien:	0^+_1 bei 0 keV und 0^+_β bei 675 keV
Targetdicke:	150 Nd mit 10 mg/cm ²
Impulsübertrag:	etwa 0.3 - 0.6 fm^{-1}

Tabelle 2: Einige experimentelle Details.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Masterthesis
proposal wurden mit dem geometrischen kollektiven Confined- β -Soft Rotor Modell sehr große E0-Übergangsstärken bei Kernen in der Region des Formphasenüberganges voraussgesagt. Speziell für den Kern ¹⁵⁰Nd wurde ein $\rho^2(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_{\beta}^+)$ von $110 \cdot 10^{-3}$ bestimmt. Zusammen mit der bereits experimentell belegten B(E2)-Übergangsstärke von 39(2) W. u., wäre das ein Hinweis auf eine kollektive β -Vibration des zu untersuchenden Kernes. Zur experimentellen Bestätigung ist die Methode der inelastischen Elektronenstreuung am S-DALINAC ausgewählt worden. Im Hinblick auf ein solches Experiment wurden die Übergangsladungsdichte des E0-Überganges $0_1^+ \rightarrow 0_{\beta}^+$ berechnet und mittels einer Fourier-Bessel Analyse der Formfaktor des Überganges extrahiert. In der an dieses Masterthesisproposal anschließende Masterthesis wird dann der experimentelle Formfaktor am hochauflösenden 169 Grad LINTOTT-Spektrometer unter verschiedenen Impulsüberträgen bestimmt und mit den theoretischen Werten verglichen. Aufgrund der bisherigen sehr gut durch das CBS-Modell reproduzierten Observablen wird dem Experiment erwartungsvoll entgegengeblickt.

Literatur

- [1] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. 85, 3580 (2000).
- [2] N. Pietralla and O.M. Gorbachenko, Phys. Rev.C70, 011304(R) (2004).
- [3] A. Bohr, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk Selsk. 26, No. 14 (1952).
- [4] R. Krücken, et al., Phys. Rev. Lett. 88, 232501 (2002).
- [5] J. Bonnet, et al. in Vorbereitung.
- [6] A. Richter, Operational Experience at the S-DALINAC, Proc. of the 5th EPAC, Eds. S. Myers,
 A. Pacheco, C. Petit-Jean-Genaz, J. Pool, IOP Publishing, Bristol (1996) 110.
- [7] A. Lenhard, Dissertation, TU Darmstadt (2004).